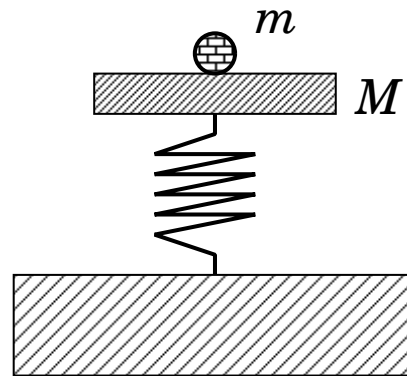


振動する板の上に「ある質量」の物体を置くと、振動数を大きくすると物体が板から飛び上がる。前回のクイズでは、この飛び上がる条件と質量の関係を聞いた。質量が重い方が早く飛び上がる？

以下に昨年のレポート問題の問題と解答例を示します。ここでは振幅と飛び上がる条件を考察しています。

飛び上がるボール

図のように質量 M の板が地面にばねで接続されている。ばねは平衡点からの伸びに比例して、復元力が働くとする。その比例定数（ばね定数）は k とする。この板の上に質量 m のボールが乗っている。板をゆっくりと押し、その後に離すと板は振動運動をした。その振幅が小さいときには、ボールは板の上にのったままだったが、振幅を大きくするとボールは板から離れてしまった。この現象を考察しよう。板とボールには鉛直方向に重力が働いていて、重力加速度は g とする。



1. 板とボールの運動方程式を求め、板の運動を調べよ。特に、板の振動とボールの質量の関係を説明せよ。
2. ボールが跳ね上がるための振幅についての条件を求めよ。
3. また、同じ振幅のとき、ボールの質量に対する飛び跳ねる条件を求めよ。

1. バネの釣り合いの位置を原点として、鉛直上向きに z 軸をとることとする。重力加速度は g として、運動方程式は、それぞれ、

$$M\ddot{z} = -Mg - N - kz$$

$$m\ddot{z} = -mg + N$$

となる。ここで、 N はボールと板の間に働く垂直抗力である。この方程式から、 N を消去すると、 $(M + m)\ddot{z} = -(M + m)g - kz$ となり、解くべき微分方程式は、

$$\ddot{z} + \frac{k}{M + m}z = -g$$

となり、質量 $(M + m)$ のバネ振り子の運動方程式と同じである。この方程式の一般解は、二つの積分定数を A, ψ として、

$$z(t) = -\frac{M + m}{k}g + A \cos(\omega t + \psi)$$

である．ここで，振動数を $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ とおいた．ボールと板がくっついて運動するときは，力の釣り合いの位置 $z^* = -\frac{M+m}{k}g$ のまわりの振動数 ω の単振動となる．

2. はねあがるときには，垂直抗力がゼロになっている．その条件を議論すればよい．逆にしっかりと板にのっている条件は垂直効力が正になっている条件であるから，

$$N = m\ddot{z} + mg = m(-A\omega^2 \cos(\omega t + \psi) + g) > 0$$

である．振幅 A は正であることに注意すると，垂直抗力がもっとも小さくなるのは $\cos(\omega t + \psi) = 1$ になるとき (もっとも最高位置に達したとき) で，

$$N \geq -A\omega^2 + g$$

である．この右辺がゼロよりも小さくなるとはねあがる．つまり，はねあがる条件は，

$$-A\omega^2 + g \leq 0 \quad \implies A \geq \frac{g}{\omega^2} = \frac{M+m}{k}g = z^*$$

となり，力の釣り合いの位置よりも大きな振幅が必要となる．

3. A を与えられた定数として，ボールの質量に対する条件に書き直すと，

$$A \geq g/\omega^2 = \frac{M+m}{k}g, \quad m \leq \frac{Ak}{g} - M$$

となり，軽い方がはねあがりやすい．

クイズでは振幅は一定として，振動数を大きくしたとき，はねあがり条件は質量 m に依存するかということだった．振動数を大きくして，早く振動させるということはばねを固くすることに相当すると思えば，上の式から， k を大きくしたときに質量 m が小さい方が条件を先に満たすことになる．

第三回力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

ver. 1.0: 2012.06.15

問題 1 : 力とポテンシャル

1. 力ベクトル $F(x)$ があるポテンシャル $U(x)$ を用いて ,

$$F(x) = -\nabla U(x)$$

と表されるとき , $\nabla \times F = 0$ となることを示せ . ここで , ナブラは ,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

である .

2. ある力が次のようなベクトルで与えられている :

$$F = (2x + y^2, 2xy + 3y^2, 0).$$

これは保存力であるかどうかを調べ , 保存力であればポテンシャルを求めよ .

問題 2: 力とポテンシャル ポテンシャル

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x} + \frac{b}{2x^2} & (x > 0) \\ \infty & (x \leq 0) \end{cases}$$

の中で x 軸上を正の領域 ($x > 0$) 運動する質量 m の質点の運動を考える . ただし , 定数 a, b は正とする .

1. 長さの次元を L , 質量の次元を M , 時間の次元を T とする . 例えば , 力 F の次元は , $[F] = MLT^{-2}$ となる . a や b の次元を求めよ .
2. 力を求めよ .
3. 力が 0 になる位置はどこか求めよ .
4. 初期条件として , 速度ゼロである位置に質点を置く . この後の運動で無限遠まで吹っ飛ばされる位置の条件を求めよ .
5. 適当な初期条件のもとで振動運動するときの周期を近似的に求めよ .

問題 3 「講義について」: 何かあれば ...

締め切りは二週間後とする .