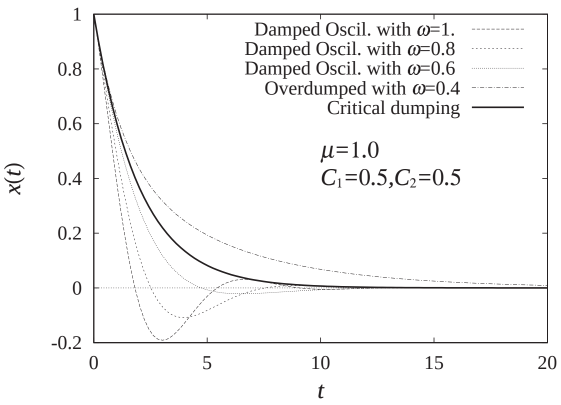

図 6: (iii) の場合: ちょうど，(i) と (ii) の境目なので,「臨界」と呼ばれているのだろう．グラフには $\mu = 1$ として，ω を変えて書いてみた．ω を減らして振動運動しなくなるところがこの臨界減衰である．

である．ここで，$\omega' = \sqrt{4\omega^2 - \mu^2}/2$ であり，A, ψ は C_1,C_2 から決まる定数である[19]．単振動と比べると，振幅は指数関数的 $\exp(-\mu t/2)$ に減少し，角振動数が ω から ω' に減っている．このような運動は減衰振動と呼ばれている．時間とともに減衰するのは**振幅**であって，角振動数あるいは周期ではないことに注意しよう．

(iii) $\mu^2 - 4\omega^2 = 0$ ：ちょうどつり合う場合

これは特性方程式が重根を持つときである．一つの基本解は，$x_1(t) = \exp(-\mu t/2)$ であるが，このままでは一次独立な 2 つの関数が得られていない．そこで，$x(t) = A(t)\exp(\lambda t)$ とおいて，改めて微分方程式に代入して，$A(t)$ の満たすべき条件を考えてみる．元々の特性方程式も考慮すると，条件は $\ddot{A} + (2\lambda + \mu)\dot{A} = 0$ となるが，$A(t) = t$ はその条件を満たす． 結果として，もう一つの基本解は $x_2(t) = t\exp(-\mu t/2)$ となることがわかる．一般解は，

$$x(t) = e^{-\mu t/2}(C_1 + C_2 t) \tag{33}$$

となる．この運動は臨界減衰と呼ばれている[20]．

[19] 最後の式変形は少々ややこしいかもしれない．まず，ゴールは式 (32) のように指数関数的に減少する振幅を持つ振動関数に表したいとする．そのために，

$$C_1 = \frac{A}{2}e^{i\phi}, C_2 = \frac{A}{2}e^{-i\phi}$$

とする．この定義を用いると，式 (32) の一つ前の式の C_1, C_2 は $C_1 + C_2 = A\cos\phi$，$C_1 - C_2 = A\sin\phi$ となる．後は三角関数の合成則を使って式 (32) が出てくることを確かめてほしい．ここで，C_1, C_2 は複素数であるが，A, ϕ は実数であることに注意してほしい．上の式は二つの時間に依らない定数 C_1, C_2 から二つの定数 A, ϕ への変換なのだが，明らかに制限が加わっている．つまり，C_1, C_2 は勝手に選んでよい複素数だったのに，その大きさは等しくなっているというわけである．これは，$x(t)$ が任意の時刻で実数であることの条件から来ている．実は勝手に選んでよいわけではなかったのである．

[20] 臨界とはギリギリという意味である．どうして臨界減衰なのかはグラフを書いてみればわかる (書かなくてもわかるが...)．

4　仕事とエネルギー

4.1　仕事と運動エネルギー

問 4.1-1：「仕事の次元」

仕事は，力を軌道にそって線積分したものである．

$$[\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}] = M\frac{L}{T^2}\cdot L = M\frac{L^2}{T^2}$$

問 4.1-2：「斜面の落下」

1. 斜面上の物体に置かれた物体に働く力は，重力と斜面からの抗力である．ところが，物体は斜面に沿って運動するので，抗力と重力の斜面に対して垂直成分は仕事をしない (運動の方向と力の方向が垂直になっている．$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}=0$)．力の斜面に沿った方向の力は，$F_l = mg\sin\theta$ であり，一定である．一方で，斜面の長さは $l = \dfrac{h}{\sin\theta}$ である．

$$\text{仕事} = \int_{\text{上}}^{\text{下}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = mg\sin\theta\frac{h}{\sin\theta} = mgh$$

となる．
2. この結果は角度 θ には全く依存しない．つまり，高さ h から地面まで重力がする仕事は斜面の角度には関係ないことがわかる．この仕事が運動エネルギーに変換されるわけである．

問 4.1-3：「振り子の仕事」

1. 糸はたるまないとすると，振り子の運動に常に垂直の方向に力が働くのは，糸の張力である．つまり，それ以外の力はなんらかの意味で仕事をする．答えは，重力と空気抵抗．
2. 答えは空気抵抗．理由は，空気抵抗は常に振り子の速度に抵抗力として働き，振り子の運動エネルギーを減らすからである．重力は正にも負にもなる[21]．

問 4.1-5：「摩擦力のする仕事」

1. 摩擦力は垂直抗力に比例するとする．今，垂直抗力は mg であり，摩擦係数を μ とすると，摩擦力は $mg\mu$ で，方向は速度と反対方向である．このとき，距離 l だけ移動する

[21] もう少し説明した方がいいかな?振り子が最下点に降りて来るまでは正の仕事をし，そこから昇るときには負の仕事をする．

間に摩擦力のする仕事は，$-mg\mu l$ である．この仕事は椅子の運動エネルギーの増減に等しい．この関係から距離 l を求めることが出来,

$$-mg\mu l = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow l = \frac{1}{2g\mu}v_0^2 \simeq \frac{1}{2 \times 9.8 \times 0.8}2^2 \simeq 0.26$$

となる，つまり，26cm で止まる．

初速度が制御できるとすれば，初速度と停止までの移動距離から摩擦係数が見積もることができる．

2. 移動距離 l は初速度 v_0 の二乗に比例するので，初速度を二倍にすれば，移動距離は四倍になる．

4.2 保存力と力学的エネルギー保存則

問 4.2-1

1. 力からポテンシャルを求めてみよう．ここは簡単のために一次元運動の問題を考えることにする．今，ばねは一次元方向にしか動かないとする．力は $\boldsymbol{F} = (-kx, 0, 0)$ なので，ばねの自然長の位置を原点とし，その原点を基準にとると，ポテンシャル U は

$$U = -\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\text{経路}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -\int_0^x (-kx')dx' = \frac{kx^2}{2}$$

となる．

2. 一様な重力の場合は，鉛直上向きに z 軸をとれば，地面 $(z=0)$ を基準 $(U(z=0)=0)$ にして,

$$U = -\int_0^h (-mg)dz = mgz$$

問 4.2-3

講義では，ある質点の軌跡に沿って，ある点と軌跡上のある点の力学的エネルギーが等しいことを導いた．ここでは，エネルギー保存則を力学的エネルギーの時間変化が無いとして確認する．さて，順番にやってみる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + u(\boldsymbol{x})\right)\\ &\quad (U\text{ は時間依存しないが，}\boldsymbol{x}\text{を介して時間に依存している．})\\ &= m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\frac{d}{d\boldsymbol{x}}U,\\ &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot(-\boldsymbol{F}) = 0\end{aligned}$$

最後の変形で使ったのは，運動方程式: $m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$ とポテンシャルの定義: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{x})$ であった．

問 4.2-4

講義でやった話の延長である．運動方程式の解からエネルギーを求めてみる．質点の質量を m，重力加速度を g，抵抗係数を κ とすると，運動方程式は $m\ddot{x} = -mg - \kappa\dot{x}$ となる．この運動方程式の一般解は，未定定数を C_1, C_2 として，

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}gt$$

である．また，速度は $\dot{x} = -\frac{\kappa}{m}C_2 e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{mg}{\kappa}$ である．初期条件は，$t=0$ で，$x=0, v_0=0$ とすると，

$$\begin{aligned} x(t=0)=0 &= C_1 + C_2 \\ \dot{x}(t=0)=0 &= -\frac{\kappa}{m}C_2 - \frac{mg}{\kappa} \Rightarrow C_1 = \frac{m^2}{\kappa^2}g, C_2 = -\frac{m^2}{\kappa^2}g \end{aligned}$$

これらより，

$$x(t) = \frac{m^2}{\kappa^2}g\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) - \frac{mg}{\kappa}t \tag{34}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{mg}{\kappa}\left(e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1\right) \tag{35}$$

となる．

1. 運動エネルギーは，

$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{m^3g^2}{2\kappa^2}\left[e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1\right]^2$$

となる．

極限の様子を調べておくと，$t=0$ では $K(t=0)=0$ で，初期条件からこれは当然の結果である．$t\to\infty$ のとき，$K(\infty) = \frac{m^3g^2}{2\kappa^2}$ であるが，これは終端速度が $v_\infty = \frac{mg}{\kappa}$ であることからも予想される結果である．

2. 位置エネルギーは，

$$U(t) = mgx(t) = \frac{m^3g^2}{\kappa^2}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) - \frac{m^2g^2}{\kappa}t$$

である．

3. 抵抗力がする仕事を考えてみる．

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^{x(t)} (-\kappa\dot{x})\,dx = \int_0^t (-\kappa\dot{x})\frac{dx}{dt'}dt' = -\kappa\int_0^t \dot{x}^2 dt' \\ &= -\kappa\int_0^t \frac{m^2g^2}{\kappa^2}\left(e^{-\frac{\kappa}{m}t'} - 1\right)^2 dt' \\ &= \frac{m^3g^2}{2\kappa^2}\left(e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1\right)^2 - \frac{m^2g^2}{\kappa}t + \frac{m^3g^2}{\kappa^2}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) \end{aligned} \tag{36}$$

である． この仕事は，

$$W(t) = K(t) + U(t)$$

の関係がある．