

問 4.2-5 : 「5 個球振り子」

この問題はいろいろと難しいので、夏休みの宿題にする。

問 4.2-6 : 「球面からの飛び出し」** ²²

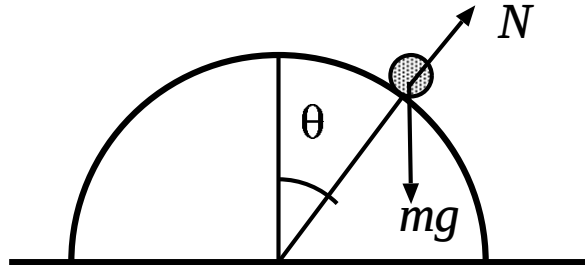
球に働く力は、図のように重力 mg と円からの垂直抗力 N である。座標は振り子の場合と同様に設定する。座標の正の方向は、それぞれの変数が大きくなる方向をとることにする。原点は円の中心にとり、質点の初期値は $(r, \theta) = (r, 0)$ である。

1. 運動方程式は、それぞれ

$$\theta \text{ 方向: } mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta$$

$$r \text{ 方向: } -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N$$

である。



2. θ 方向の運動方程式の両辺に速度 $R\dot{\theta}$ をかけて、時間で積分してみる²³。

$$\begin{aligned} \int dt R\dot{\theta} (mR\ddot{\theta}) &= \int dt R\dot{\theta} (mg \sin \theta) \\ \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 \right) &= - \int dt \frac{d}{dt} (mgR \cos \theta) \end{aligned}$$

より、右辺を左辺に移行することにより、

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + mgR \cos \theta \right] = 0$$

であることがわかる。つまり、この式の括弧の中は時間に依存しない保存量であることがわかる。この保存量が力学的エネルギーである。

3. 初期条件は、 $t = 0$ で $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$ であるので、このときの力学的エネルギーは $E = +mgR$ である。これと力学的エネルギー保存式より、任意の時間で、

$$\frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + mgR \cos \theta = +mgR$$

が成り立ち、 $mR\dot{\theta}^2 = -2mg \cos \theta + 2mg$ であり、垂直抗力 $N(t)$ は、

$$N(t) = -mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = 2mg \cos \theta - 2mg + mg \cos \theta$$

であることがわかる。質点が円周から離れる条件は $N = 0$ であり、そこから角度 θ の条件が

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

であることがわかる。つまり、この角度で垂直抗力がなくなり、円周から質点は飛び出す。

²² 今回の講義では扱っていない運動方程式の作り方です。

²³ この意味は円周に沿って運動する質点の仕事を計算している。

問 4.2-7: 「力とポテンシャル」 ²⁴

● (a) ポテンシャルの定義:

ポテンシャルの定義はある基準点から位置 (x, y, z) までに力 F に逆らう仕事である²⁵ .

$$U(x, y, z) = - \int_0 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

力 F が与えられたときにポテンシャル $U(x, y, z)$ は, この式から求めることが出来る .

● (b) ポテンシャルから力へ:

一方で, ポテンシャルが与えられたときに力は, やはりこの定義から求めることができる . ある点 $A(x, y, z)$ から微小に離れた点 $B(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ とのポテンシャルの差を Δ の一次関数の範囲で求める .

$$U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) = - \int^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

変位ベクトル $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ とすると, 右辺は,

$$\int_B^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \simeq -\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$

となる . また, 左辺 ΔU は,

$$U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \simeq U(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) \Delta z$$

となる²⁶ ことに注意すると,

$$\Delta U \simeq \frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} U(x, y, z) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) \Delta z = \nabla U \cdot \Delta \mathbf{r}$$

となる . 両辺を比べると, 任意の $\Delta \mathbf{r}$ に対して等号が成り立つためには,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla U(x, y, z)$$

となることが分かる .

²⁴講義で説明したが, 質問が多かったのでここで再解説 .

²⁵あるいは力 F とつり合う力 $-F$ のする仕事 .

²⁶中間をもう少し補間しておく ,

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) + U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) \\ &= \frac{U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\Delta x} \Delta x + U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial U(x, y + \Delta y, z + \Delta z)}{\partial x} + (\Delta x \text{ の } 1 \text{ 次以上の項}) \right) \Delta x + U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} + (\Delta x, \Delta y, \Delta z \text{ の } 1 \text{ 次以上の項}) \right) \Delta x + U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) \\ &\simeq \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \Delta x + U(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) = \dots \end{aligned}$$

と続く .

問 4.2-8 : 「ばねの運動 (過去問)」

1. 「ばね定数の次元」: 運動方程式を見て, 加速度の次元 MLT^{-2} が kx の次元に等しいことが分かる.

$$MLT^{-2} = [k]L \implies [k] = \underline{ML^{-2}}$$

である.

2. 「つりあいの位置」: 力がつりあっている位置 x_0 では加速度がゼロであるから, 運動方程式より,

$$0 = -kx_0 - mg \implies \underline{x_0 = -\frac{mg}{k}}$$

3. 「斉次方程式へ」: 時間に依存しない定数 x_0 は運動方程式の特解になっていることが分かる. そこで, $x(t) = x_1(t) + x_0$ とすると,

$$m \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_0) = -k(x_1 + x_0) - mg \implies \underline{m \frac{d^2}{dt^2}x_1 = -kx_1}$$

4. 「特性方程式」: $x_1(t) = e^{\lambda t}$ とおくと, 上の微分方程式は, $m\lambda^2 e^{\lambda t} = -ke^{\lambda t}$ となり, 任意の時刻 t でこれが成り立つためには λ が満たすべき方程式は $\underline{m\lambda^2 = -k}$ である.

5. 「一般解」: この特性方程式を解くと, $\lambda = \pm i\sqrt{k/m}$ であるので, $x(t)$ の一般解は, $\omega = \sqrt{k/m}$ として,

$$x(t) = x_1(t) + x_0 = C_1 \exp(i\omega t) + C_2 \exp(-i\omega t) - \frac{mg}{k}$$

となる. ここで, C_1 と C_2 は未定定数である.

6. 「未定定数の決定」: 前問の結果から速度 $v(t)$ を求めておくと,

$$v(t) = i\omega C_1 \exp(i\omega t) - i\omega C_2 \exp(-i\omega t)$$

となる. 初期条件 ($x(t=0) = v(0) = 0$) から C_1, C_2 を解く.

$$x(0) = C_1 + C_2 - \frac{mg}{k} = 0, \quad v(0) = i\omega C_1 - i\omega C_2 = 0, \implies C_1 = C_2 = \frac{mg}{2k}$$

より, 運動方程式の解

$$\underline{x(t) = \frac{mg}{2k} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) - \frac{mg}{k} = \frac{mg}{k} \cos(\omega t) - \frac{mg}{k}}$$

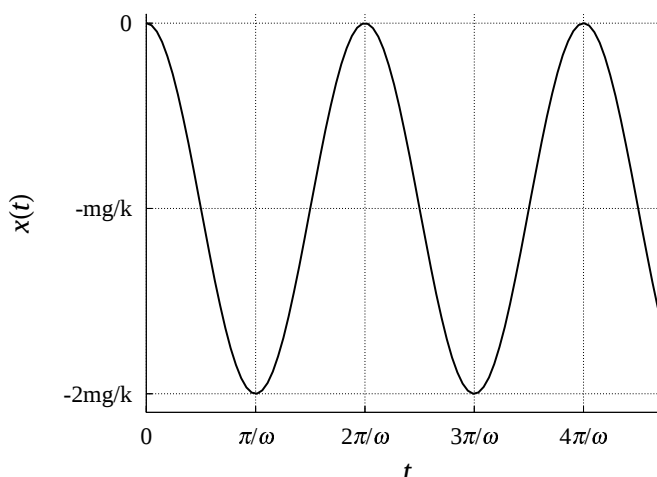
が得られる²⁷.

²⁷最後の变形では, オイラーの公式を用いた.

7. 「周期」: 周期的に運動するときの運動の周期 T とは, $x(t) = x(t+T)$ なる最小の T のことである. $\cos$ が周期関数であることから $\omega T = 2\pi$ となり, $T = 2\pi\sqrt{k/m}$.
8. 「位置 $x(t)$ のグラフ」: グラフを描いておく.

主なポイントは以下のとおりである.

- 軸の名前
- 典型的なスケール. この問題だと、横軸は周期に関する情報で、縦軸は振幅に関する情報が見て分かるようにする.



9. 「運動エネルギー」: 速度 $v(t)$ は, $v(t) = \omega \frac{mg}{k} \sin \omega t$ であるので, 運動エネルギー $K(t)$ は,
- $$K = \frac{mv(t)^2}{2} = \frac{m(\omega mg \sin \omega t)^2}{2k^2} = \frac{(mg)^2 \sin^2 \omega t}{2k}$$
10. 「重力の位置エネルギー」: 重力の位置エネルギー $G(t)$ は

$$G(t) = mgx(t) = \frac{(mg)^2}{k} (\cos(\omega t) - 1)$$

11. 「ばねの位置エネルギー」: ばねの位置エネルギー $U(t)$ は,

$$U(t) = \frac{kx(t)^2}{2} = \frac{k}{2} \left(\frac{mg}{k} \cos(\omega t) - \frac{mg}{k} \right)^2 = \frac{(mg)^2}{2k} (\cos(\omega t) - 1)^2$$

12. 「力学的エネルギー」: 前問のエネルギーを全て足したエネルギーが力学的エネルギー E である.

$$E = K(t) + G(t) + U(t) = \frac{(mg)^2}{2k} (\sin^2 \omega t + 2(\cos(\omega t) - 1) + (\cos(\omega t) - 1)^2) = 0$$

これは時間に依存しないので, 力学的エネルギーは保存されていることが分かる. もっとも, これは保存力の一般的な性質として証明することもできる (問 4.2-3 を参照).

13. 「仕事の符号」: 正の仕事をするのは, 落ちているときの重力と自然長に向かって縮むときのバネの力である.

5 衝突現象

問 5-1 : 「弾性衝突」

1. 質量 m_1 と m_2 の衝突後の速度をそれぞれ v'_1, v'_2 とする．問題の図より v_2 が v_1 と反対方向であることに注意して，運動量保存則とはねかえりの式は，

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - (-v_2)}$$

である．これらを解いて，

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} - e \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 + v_2), \quad v'_2 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} + e \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 + v_1)$$

2. 衝突前の運動エネルギーは $K_b = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ であり，衝突後の運動エネルギー K_a は，

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \\ &= \frac{m_1}{2} \left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} - e \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 + v_2) \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} + e \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 + v_1) \right)^2 \\ &= \frac{(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} + e^2 \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2 \\ &= \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2}{2(m_1 + m_2)} + e^2 \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2 \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{m_1 m_2 v_1^2 + m_1 m_2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2}{2(m_1 + m_2)} + e^2 \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2 \\ &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + (e^2 - 1) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2 \end{aligned}$$

であることから，その差 ΔK は

$$\Delta K = (e^2 - 1) \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2$$

となる．一般にはねかえり係数 e は 1 よりも小さいので，運動エネルギーは衝突によって減ることが分かる．等号のとき、すなわち運動エネルギーが減らないのは $e = 1$ の完全弾性衝突のときだけである．

3. 完全非弾性衝突 ($e = 0$) のときは，前問より，

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

となる．つまり，2つの質点はくっついていっしょに運動することになる．

4. $v_2 = 0$ のとき，つまり質点 2 が静止しているところに，速度 v_1 の質点が衝突したときに何が起きるかを考えてみる．衝突後の速度は，

$$v'_1 = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2}v_1, \quad v'_2 = \frac{1+e}{m_1 + m_2}m_1v_1$$

- (a) $m_1 = m_2 = m$ のとき，

$$v'_1 = (1-e)\frac{v_1}{2}, \quad v'_2 = (1+e)\frac{v_1}{2}$$

である．どちらも v_1 と同じ方向に運動するが， $e = 1$ のとき，質点 1 は静止する．

- (b) $m_1 > m_2$ ，つまり重い質点が飛んできたとき，衝突後はどちらも v_1 と同じ方向に運動する．(a) と異なりどちらかが静止することはない．
 (c) $m_1 < m_2$ のときは，特に $m_1 < em_2$ の条件が満たされると質点 1 は衝突で跳ね返されて逆向きの運動をする．

問 5-2 : 「二次元の衝突 (ビリヤード問題)」

1. x 方向, y 方向の運動量保存はそれぞれ，

$$x \text{ 方向} : m_1v_1 = m_1v'_1 \cos \theta + m_2v'_2 \cos \phi$$

$$y \text{ 方向} : 0 = m_1v'_1 \sin \theta - m_2v'_2 \sin \phi$$

2. 衝突は完全弾性として，またポテンシャルエネルギーは考えないとする，エネルギー保存則は，

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v'^2_1}{2} + \frac{m_2v'^2_2}{2}$$

3. 運動量保存則の 2 つの式より v'_1, v'_2 について解くと，

$$v'_1 = \frac{m_1v_1}{m_2} \frac{\sin \phi}{\sin(\phi + \theta)}, \quad v'_2 = \frac{m_1v_1}{m_2} \frac{\sin \theta}{\sin(\phi + \theta)}$$

である．

4. $m_1 = m_2$ のときは，特に

$$v'_1 = v_1 \frac{\sin \phi}{\sin(\phi + \theta)}, \quad v'_2 = v_1 \frac{\sin \theta}{\sin(\phi + \theta)}$$

であり，エネルギー保存則の式より，条件

$$v_1^2 = v'^2_1 + v'^2_2, \quad \sin^2(\phi + \theta) = \sin^2 \phi + \sin^2 \theta$$

ピタゴラスの定理より， $\theta + \phi = 90^\circ$ であることが分かる．

問 5-3 : 「はねかえり係数の測定」

1. 最下点をポテンシャルエネルギーの基準として，ひもの長さを l とする．最初の衝突食前のおもりの速度を v とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$mgl(1 - \cos \phi) = \frac{mv^2}{2}, \quad v = \sqrt{2gl(1 - \cos \phi)}$$

2. 衝突直後の速度を v' とする．この実験では衝突前後での全運動量は 0 になっている．そこで，はねかえりの式から衝突前後の速度の関係を求める． $e = -\frac{2v'}{2v}$ より， $v' = -ev$ である．衝突時の速度と最大振れ角の関係は前問の答えを用いて，

$$\sqrt{2gl(1 - \cos \phi^{(1)})} = e\sqrt{2gl(1 - \cos \phi^{(1)})} \implies \cos \phi^{(1)} = e^2 \cos \phi$$

3. 前問と同様に考え， $n-1$ 回目の最大振れ角 $\phi^{(n-1)}$ との関係から再帰的に求めると，

$$\cos \phi^{(n)} = e^2 \cos \phi^{(n-1)} = e^{2n} \cos \phi = \exp((2 \log e)n) \cos \phi$$

となる．振れ角は徐々に小さくなることが分かる．

4. この振れ角を観測し，衝突回数 n の関数としてグラフに書いたときに， n の指数関数的に現象する振れ角の時定数からはねかえり係数が求まる．

問 5-4 : 「5 個球振り子再び」 振り子の球のはねかえり係数が 1 でないとすると，相対運動のエネルギーは徐々に減っていく．重心の運動エネルギーは保存されるので，十分時間が経つと全ての球が重心運動になり，共通の運動になる．詳細は講義ノートを参照してください．

問 5-5 : 「すつとびボール」 解答例は省略します．講義ノートを参考にしてください．

ここでは衝突は順番に起こることを仮定しています．下側のボールの質量を m_1 ，上側のボールの質量を m_2 とし，ボール間のはねかえり係数を e としたときに，上側のボールを一つだけで落としたときよりも高く跳ね上がる条件は，

$$e > \frac{m_2}{m_1}$$

となる．同じ質量の 2 つのボールでは跳ね上がらないことになります．確かにテニスボール 2 つで実験してみても跳ね上がることはありません．

それから，床との衝突とボール間の衝突が順番で起きることを仮定していますが，これが本質的かどうかはよく分かりません．同時に衝突しているときに何が起きているかが不明で，はねかえり係数で運動が表せるかどうか分かりません．ただし，実験的に衝突を順番に起こすことは出来ます．初期状態のボールをわざと離しておくことで実現可能です．このときには特に変わったことが起きずにちゃんとすつとびます．

6 慣性力について

問 6-1 : 「慣性力」 電車に乗ったときの、カーブ時や走り出し、止まるとき、メリーゴーランドに乗ったときやエレベータにのったとき、

問 6-2 : 「慣性力の大きさ」 地球の角速度は、

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ 時間}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ sec}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/sec.}$$

である、

1. コリオリ力が重力の 1% の大きさになるために必要な速度の条件を考えると、

$$|2m\omega v| \sim mg \times 0.01 \implies v \simeq \frac{0.01g}{2\omega} \simeq 670 \text{ m/sec}$$

これは音速を軽く越えないと重力の 1% にはならない、

2. 遠心力は回転軸と垂直方向であり、重力を弱くする方向になる。緯度を α とすると、みかけの重力加速度 g' は、 $mg' = mg - mR\omega^2 \cos \alpha$ となる。ちょうど赤道上での変化率を見積もってみると、

$$\frac{g' - g}{g} = -\frac{R\omega^2}{g} = -\frac{6.4 \times 10^6 \text{ m} \times (7.27 \times 10^{-5})^2}{9.8} \simeq -3.5 \times 10^{-3}$$

である。約 0.35% ほど小さいことになる²⁸。

問 6-3 : 「回転する管のなかのボール」

1. 慣性系での単位ベクトルを座標軸方向のそれぞれ e_x, e_y とし、回転座標系のそれを e'_x, e'_y とする。単位ベクトル間の関係は、

$$e'_x = \cos(\omega t)e_x + \sin(\omega t)e_y, \quad e'_y = -\sin(\omega t)e_x + \cos(\omega t)e_y.$$

であり、その時間微分は、

$$\dot{e}'_x = -\omega \sin(\omega t)e_x + \omega \cos(\omega t)e_y = \omega e'_y, \quad \dot{e}'_y = -\omega \cos(\omega t)e_x - \omega \sin(\omega t)e_y = -\omega e'_x.$$

となる。ある位置ベクトル r はそれぞれの座標で

$$r = xe_x + ye_y = x'e'_x + y'e'_y$$

と表せる。この関係を使って、位置ベクトルから速度ベクトルを求める。

$$\dot{r} = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y = \dot{x}'e'_x + \dot{y}'e'_y + x'\dot{e}'_x + y'\dot{e}'_y = (\dot{x}' - \omega y')e'_x + (\dot{y}' + \omega x')e'_y$$

²⁸ しかし、南の島に遊びにいった、体が軽く感じたとしても、それは気分の問題である。

さらに同様に加速度ベクトルも求める．

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y = (\ddot{x}' - \omega\dot{y}')e'_x + (\ddot{y}' + \omega\dot{x}')e'_y + (\dot{x}' - \omega)e'_x + (\dot{y}' + \omega x')e'_y \\
 &= (\ddot{x}' - \omega\dot{y}')e'_x + (\ddot{y}' + \omega\dot{x}')e'_y + (\dot{x}' - \omega)\omega e'_y + (\dot{y}' + \omega x')(-\omega e'_x) \\
 &= (\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x')e'_x + (\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'^2)e'_y
 \end{aligned}$$

加速度ベクトルをそれぞれの座標の成分として求めたので，慣性系に対して運動方程式を書き下し，回転座標系の成分で表してみる．運動方程式は， $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ であるが，力の成分を $\mathbf{F} = F_x e_x + F_y e_y = F'_x e'_x + F'_y e'_y$ としておく．そこから，回転座標系の成分としての運動方程式が，

$$\begin{aligned}
 e'_x \text{成分} &: m(\ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x') = F'_x \\
 e'_y \text{成分} &: m(\ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y'^2) = F'_y
 \end{aligned}$$

が求まる．角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ として， $\boldsymbol{\omega} = \omega e_z$ とおく．これは大きさが角速度で，方向が回転の右ねじが進む方向にしておく．これを用いると，回転座標系での運動方程式は，

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}' + 2m\dot{\mathbf{r}}' \times \boldsymbol{\omega} + m\omega^2 \mathbf{r}'$$

となる．右辺の第二項 $2m\dot{\mathbf{r}}' \times \boldsymbol{\omega}$ がコリオリ力である²⁹．また，右辺の第三項 $m\omega^2 \mathbf{r}'$ が遠心力である．コリオリ力は速度に比例し，速度方向に垂直な力であることが特徴であり，遠心力は回転軸からの距離に比例し，回転軸から遠ざかる方向に働く力である．

2. 回転座標系での運動方程式を求める．まず， y' 方向へは運動は拘束されているので， $\dot{y}' = \ddot{y}' = 0$ であることに注意する．管とともに動いている座標系から見ると質点はいつでも管の中に閉じ込められている．初期条件から $(x', y') = (l, 0)$ とすると，時間に依らず $y' = 0$ である．質点への力は管からの抗力 R のみであることから，運動方程式は

$$\begin{aligned}
 e'_x \text{成分} &: m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \\
 e'_y \text{成分} &: m\ddot{y}' = R - 2m\omega\dot{x}' = 0
 \end{aligned}$$

x' 成分の運動方程式を解くと， $x' = C_1 \exp(\omega t) + C_2 \exp(-\omega t)$ であるが，初期条件から， $C_1 + C_2 = l, C_1 - C_2 = 0$ となり，

$$x'(t) = l \cosh(\omega t)$$

となる．時間が経つと， x' の大きな方向に運動する．これは管の中にボールを入れて振り回すと，当然吹きとばされる．ここではその関数形が求まったことにな

²⁹ $2m\dot{\mathbf{r}}' \times \boldsymbol{\omega} = -2m\omega \times \dot{\mathbf{r}}'$ であることに注意されたい．

る．回転座標系から見ると，慣性力である遠心力を受けて運動しているように見える．ちなみに，抗力はコリオリ力とつりあっていて， $R(t) = 2m\omega^2 l \sinh(\omega t)$ となる．抗力は指数関数的に大きくなるので，それに耐えられない弱い管だと途中で管が壊れてしまう．