

第三回物理学 B レポート問題の解答例

問題 0: バネの仕事とエネルギー

この問題は練習問題の問 4.2-8 とほぼ同じ問題である．詳しい解説はその解答例に示したので，そちらを参考にしてください．2. だけはここで示し，3. については補足しておきます．

0-2. 自然長から x_0 までにばねのした仕事 W は，

$$W = \int_0^{x_0} (-kx)dx = -\frac{kx_0^2}{2}$$

である．

0-3. エネルギーが保存していることを示すのは，具体的に運動の様子を調べてみて，全力学的エネルギーが時間に依存しないことを確認すればよい．もっと簡単には力学的エネルギーの時間微分が 0 になることを示してもよい．すなわち，

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv(t)^2}{2} + \frac{kx(t)^2}{2} + mgx(t) \right)$$

がゼロになればよい．運動方程式の結果を代入するのではなくて，この微分を計算し運動方程式の情報を使えば示すことは出来る．一般的な証明は練習問題の問 4.2-3 に説明されている．

問題 1: 力とポテンシャル

ポテンシャルが与えられたときに，正しく力が計算できて，かつ力の方向を思い浮かべて運動が予想できるようになることが今回のレポートの趣旨でした．計算だけでいても，運動が想像できないようでは算数の問題を解いているのと区別できないですね．

さて，今日の問題はそもそもポテンシャルの符号が反対でした．万有引力ポテンシャルは，

$$U(x, y, z) = -G \frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

です．

1-1 ポテンシャルが与えられたときに力は

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) U \quad (7)$$

から求めることが出来る^j．例えば，その x 成分 F_x は，

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{-GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{GMm(-1/2)(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-GMmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (8)$$

^j ∇U の前のマイナスを忘れることがあるが，ポテンシャルの絵を書いて，そこにボールを置いたときに，転がる方向が力になっているかどうかを確かめるとよい．この意味でレポート問題で符号を忘れてしまっていて，引力になっていないことに気付いたとしたら，それで合格である．

となる． F_y, F_z も同様に計算できる．それらをまとめると，位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とその大きさ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ において，力ベクトル $\mathbf{F}$ は，

$$\mathbf{F} = \left(\frac{-GMmx}{r^3}, \frac{-GMmy}{r^3}, \frac{-GMmz}{r^3} \right) = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (9)$$

となる．確かにこの力は原点の方向を向いていることがわかる^k．

1-2 力の大きさは， $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ であるが，上の式の， $\mathbf{r}/r$ が大きさ 1 のベクトル $\mathbf{r} = (x/r, y/r, z/r)$ であることに注意すると，力 $\mathbf{F}$ の大きさは

$$F = \frac{GMm}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{GMm}{r^2}$$

と距離について r^{-2} になることがわかる^l．

問題 2: 力とポテンシャル 2

このポテンシャルは中性原子間のポテンシャルのモデルとしてよく用いられる．遠方の Von der Waals 引力に関する r^{-6} と，近傍でのハードコア的な (原子核が食い込まないための) 斥力を r^{-12} として近似したモデルになっている．

2-1 まずはグラフを描いてみる (図 2)．ここではコンピュータに描かせたが，もちろん概略は手で描けるはずである．まず，極限でどうなっているかを調べる． $r \rightarrow 0$ では発散していて， $r \rightarrow \infty$ ではゼロになっている．また，その間は微分係数を求めて，極値が一つあることを確認して，その極値が負になっていることがわかるとおおよその図は描くことが出来る．

2-2 ポテンシャルが与えられているので，力を求める．力は，

$$F_r = -\frac{d}{dr}U(r) = 24\frac{\epsilon}{\sigma} \left(2 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^7 \right)$$

となる．力も上のグラフに描いておいた．

2-3 ちょうど力がつり合う ($F_r = 0$) ところは， $r^* = 2^{1/6}\sigma$ であり，そのときのポテンシャルの値は $U(r^*) = -\epsilon$ である．

2-4 もしも原子間の距離が r^* のところに運動エネルギーを持たずにそっと置かれたとすると，力を受けずに心地よく収まるのがこの点だというわけである．これは，ポテンシャルのグラフを見ただけでもわかることである．この力がつり合う点は平衡点と呼ばれる．

^kこの時点で出題ミスは気付くべきである．

^l電荷に働く基本的な力であるクーロン力もこのように距離の逆二乗則になっている．ただし，質量が電荷の量に対応する．クーロン力の場合にはこの電気の量が正にも負にもなることから，引力にも斥力にもなる．+同士は反発しあって，+と- のとき引力が働くのである．この引力と斥力が混ざり合うために，クーロン力が長距離間に働くことを身近に感じることはない．逆に，重力には斥力がないために，力がキャンセルすることはない．ハレー彗星がまた 70 年後にやってくるのも，重力に斥力がないためなのである．

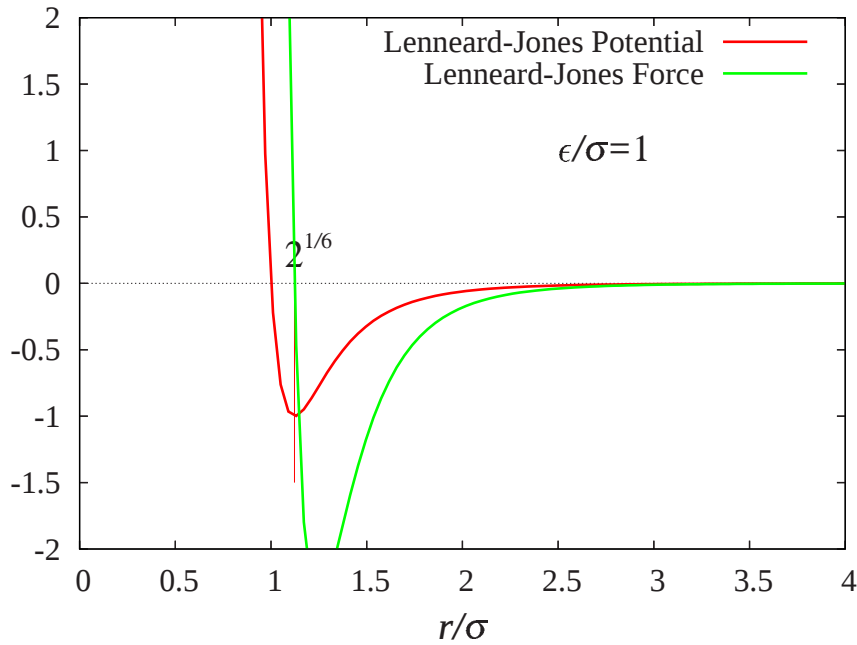


図 2: Lennard-Jones ポテンシャル ($\epsilon/\sigma = 1$) とその力 .

次に，運動エネルギーを与えてみる．ポテンシャルエネルギーと運動エネルギーの合計である力学的エネルギー E がゼロ以下のときには，許される位置はちょうどポテンシャルがへこんでいるところである^m．ポテンシャルが負の領域では運動エネルギーとのエネルギーの変換をしながら， r の許される範囲を振動することになる (図 3 の $E < 0$) ．また，力学的エネルギーが正になると，一度 r が小さくなることはあるが，そこでのポテンシャルに跳ね返されると，どんどん r は大きくなって，無限の彼方まで運動することになる．この分子は崩壊したことになる．

振動する状態に関してはもう少し議論をすることができる．この平衡点から少し右にずれると，つまり原子間距離を大きくすると，小さくする方向に力が働き，距離を小さくすると，大きくする方向に力が働く．この様子をもう少し考えてみる．ポテンシャルの関数 $U(r)$ をこの平衡点周りで展開すると，

$$U(r) \simeq U(r^*) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{dr^2} U(r) \right|_{r=r^*} (r - r^*)^2 +$$

となる．ここで一回微分の項がないのは， r^* が平衡点であり， $U'(r^*) = 0$ であるからである．具体的に $U''(r^*)$ は計算できるので宿題にしよう．さて，このポテンシャルはバネのポテンシャルと同じである．確かに，グラフを見ると， r^* のごく近傍だけに注目すると，二次曲線で近似できるように思える．それを実際にやってみたのが，上の式である．この議論は一般的であり，どんなポテンシャルでも，安定な平衡点がある場合の近

^m例えば，グラフで r が原点近傍のところにはポテンシャルエネルギーが高すぎて到達できない．

傍で成り立つ．多くの問題で，安定な場所の近くでは振動が起きるというわけである．

さて，この式でバネ定数に相当するのが， $U''(r^*)$ である．つまり， r^* 近傍でのポテンシャル関数の曲率（曲がり具合）がバネの固さを決めていることがわかる．物質の固さの起源はここに入っているわけである．

もちろん，この二次曲線による近似がいつまで正しいわけではなく，例えば原子の運動エネルギーが大きくなって，振動の振幅が大きくなってくると簡単なバネではなくなってくる．例えば，温度が高くなるとそうなる．そのとき，ポテンシャルの形から，平衡点から距離が大きくなる方向に振動の中心がずれるようになることがわかる．これが熱膨張と考えられる．計算などしなくても，ポテンシャルの形だけからわかることも，それなりにあるというわけである．また，計算すれば，もっと個別のことについても議論ができるのである．

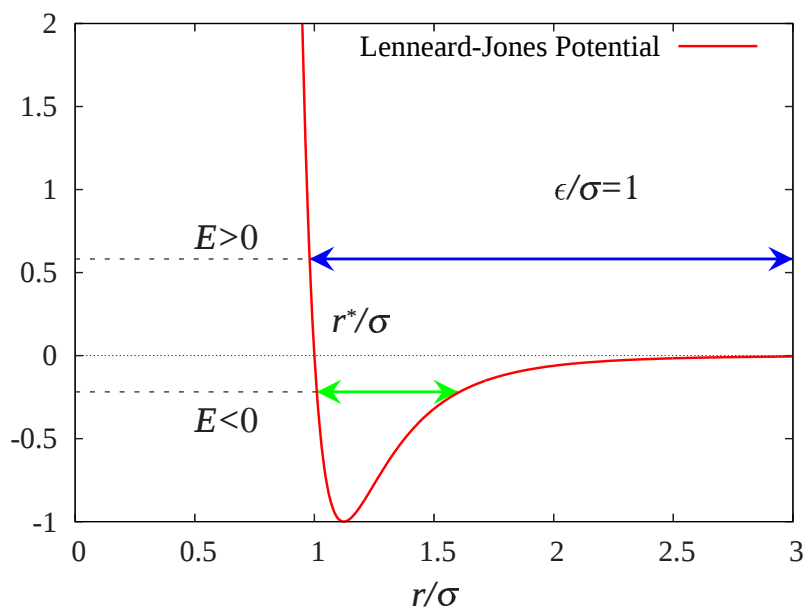


図 3: Lennard-Jones ポテンシャル ($\epsilon/\sigma = 1$) と力学的エネルギーを与えたときの運動の様子．