第四回物理学Bレポート問題の解答例

問題1 カチカチボール

講義で話したカチカチボールの質量はどれも同じであったが,「もしも質量が異なれば何がおきるだろうか?」というのがここでの問いである．また，問いをあいまいにしておいた．これは，問いの適切な立て方も考えてほしかったからである[n].

順々に起こることを考えてみよう[o].

衝突前： 最初に振り上げた球を球1とし，最下点で待っている球を球2とする．まず,球1から手を離した後に，球1に働く力は重力と糸からの張力だけである．糸はたるまないとすると，張力は仕事をしない．なぜならば，球の運動方向はいつでも張力と垂直であるからである．つまり張力とはエネルギーのやりとりはなく，重力によるポテンシャルエネルギーと球の運動エネルギーだけを考えればよい．球1が球2と衝突する直前の速度を v_0 とし，球1は高さ h から静かに離した (初速度ゼロ) とすると，力学的エネルギー保存則

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$$

より，$v_0 = \sqrt{2gh}$ であることがわかる．

一回目の衝突： それぞれの球がちょうど最下点に来たときに衝突は起きる (ように設計されている)．左向きを正の方向として，衝突後の球1，2の速度をそれぞれ v_1,v_2 とする．まず，運動量保存則より,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0 \quad \Longrightarrow 2v_1 + v_2 = 2v_0 \tag{10}$$

であることがわかる．さらに，球同士の衝突のはねかえり係数を e として，はねかえりの式から

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{v_0 - 0} \quad \Longrightarrow \quad ev_0 = v_2 - v_1 \tag{11}$$

となる．式 (10) と (11) から，衝突直後の速度はそれぞれ

$$v_1 = \frac{2-e}{3} v_0 \tag{12}$$

$$v_2 = \frac{2+2e}{3} v_0 \tag{13}$$

[n]講義でも話しているように，これからは，既存の問題を解くだけでなくて，よい問い作り，それに答えを与える能力が大事になってくる．その意味でも,「どうなる?」と聞かれたときに,「こう考えるとこうなる!」と答えてほしいわけである．とは言っても，運動の様子がちゃんと頭に浮かんで，それを論理的に説明できれば合格である．

[o]ただし，これは講義ノートを作りなおしている作業になっている．

と求まる．球 1 と 2 の速度差を調べてみると，$v_2 - v_1 = ev_0 \geq 0$ であり，軽い球の方が速く突きとばされることがわかる．これは直感的である[p]．等号は $e = 0$ のときにのみ成り立つ．このときは完全非弾性散乱なので，球は衝突時にくっつく．球が粘土だとそうなるだろう．そのとき，速度は $v_1 = v_2 = \frac{2}{3}v_0$ である．

はねかえりの式は，衝突直前の相対速度 $(v_0 - 0)$ と直後の相対速度 $(v_2 - v_1)$ が速度に依らず一定の定数であることをいっている．そして，その定数は一般に 1 よりも小さい．このことから，衝突が繰り返されると相対速度はドンドン小さくなり，最終的にはゼロになることがわかる．つまり，相対速度がゼロなので，くっつくというわけである．また，この最後に行くつくところは，$e = 0$ の結果であり，実は重心[q]の運動なのである．もしも，みなさんが「心の目」を持っていれば，それは最初の振動からずーと同じ振動をしている様子が見えるはずでなのである．

二回目の衝突 具体的に二回目の衝突を見ておく．振動の振幅がそれほど大きくないとすると，球が再び最下点にもどってくる時刻は同じである．振り子の周期は振幅が小さい時には，振り子の重さでなくて，糸の長さだけに依存している．

今度は右向きを正として，二度目の衝突後の速度を $v_1^{(2)}$，$v_2^{(2)}$ とする．運動量保存則とはねかえりの式を書いてみる．

$$m_1v_1 + m_2 + v_2 = m_1v_1^{(2)} + m_2v_2^{(2)} \implies 2v_0 = 2v_1^{(2)} + v_2^{(2)} \tag{14}$$

$$e = -\frac{v_1^{(2)} - v_2^{(2)}}{v_1 - v_2} \implies v_1^{(2)} - v_2^{(2)} = (v_2 - v_1)e = e^2v_0 \tag{15}$$

これを解くと，

$$v_1^{(2)} = \frac{1}{3}\left(2 + e^2\right)v_0 \tag{16}$$

$$v_2^{(2)} = \frac{2}{3}\left(1 - e^2\right)v_0 \tag{17}$$

となる．

- $e = 0$ のときは，一回目の衝突でくっついたので，それ以降もくっつたままである．
- $e = 1$ のときは，$v_2^{(2)} = 0$ である．つまり，最下点で球 2 は静止し，ちょうど最初の衝突前に戻ったことになる．以降は同じことの繰り返しである．衝突 2 回が周期となり同じ現象が繰り返される．これは同じ質量の球同士の衝突の場合も同じであるが，それと比較すると 2 球の位置が左にずれて球がゆれていることになる．

---

[p] 直観と突き合わせることは大事である．将棋界の羽生氏が言うように (「決断力」 (角川 one テーマ 21) (新書) 羽生 善治 (著))，大抵の場合に人間の直観は正しい．もっとも，時に直観を裏切る驚きを自然は用意してくれてはいるが...

[q] $\boldsymbol{r}_m = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$

- $0 < e < 1$ のときは，衝突後も少し右に揺れることになる．

一般の n 回衝突後 上の考察から，一般の n について考えてみる．n 回目の衝突後の速度をそれぞれ $v_1^{(n)}$，$v_2^{(n)}$ とし，衝突に際して運動の方向は変わらないので[r]，常に球の進む方向を正にとることにする．運動量保存則とはねかえりの式は次のようになる．

$$\text{運動量保存則} \quad : \quad 2v_0 = 2v_1^{(n)} + v_2^{(n)} \tag{18}$$

$$\text{はねかえりの式} \quad : \quad v_2^{(n)} - v_1^{(n)} = e^n v_0 \tag{19}$$

これらから，

$$v_1^{(n)} = \frac{1}{3}(2 + e^n) v_0 \tag{20}$$

$$v_2^{(n)} = \frac{2}{3}(1 - e^n) v_0 \tag{21}$$

が導ける．このまま n を増やすと，e^n の項がゼロになることがわかる．

さて，これで，カチカチする運動の様子が頭に浮かぶだろうか?

問題 2 質点系

講義で出した練習問題をレポートとして，その解答例を与えることにした．

<u>**2-1**(質点系の運動方程式)</u>
i 番目 $(i = 1, \cdots, N)$ の質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_i$ とすると，その運動方程式は,

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji}$$

である．
<u>**2-2**(重心の運動方程式)</u> 重心の位置ベクトル $\boldsymbol{R}_G$ は定義より

$$\boldsymbol{R}_G = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} = \sum_i \frac{m_i}{M} \boldsymbol{r}_i$$

である．ここで質点系の全質量を $M = \sum_i m_i$ とした．この重心の位置ベクトルに全ての質点の質量が集中したときの運動方程式を書いてみる．

$$M \frac{d^2 \boldsymbol{R}_G}{dt^2} = M \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \right) = \sum_i m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right)$$

[r] この性質は，最初に軽い球を持ち上げた場合は成り立たない．しかし，そのときも適当に定義すれば良い．

最後の等式は **2-1** の結果を用いた．また，右辺第二項は作用・反作用の法則より，

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_{\langle ij\rangle} (\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji}) = \sum_{\langle ij\rangle} (\boldsymbol{F}_{ij} + (-\boldsymbol{F}_{ij})) = \boldsymbol{0}$$

ゼロになることが分かる．$\langle ij\rangle$ は i,j のペアーについての和を表す．まとめると，重心の運動方程式は

$$M\frac{d^2\boldsymbol{R}_G}{dt^2} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

となり，重心に外力が集中したときの**質点の運動方程式**に一致する．内力の効果は重心の運動には表れないことが分かる．
2-3(重心の運動量保存則) 重心の運動量 $\boldsymbol{P}_G$ は，$\boldsymbol{P}_G = M\dot{\boldsymbol{R}}_G$ で定義される．その時間変化を運動方程式から求めると，

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}_G = M\ddot{\boldsymbol{R}}_G = \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

である．外力の総和がゼロであるときには右辺がゼロであり，重心の運動量の時間微分はゼロ，すなわち重心の運動量は時間に依らずに一定であることが示される．
2-4(重心回りの位置ベクトル) 各質点の重心からみた位置ベクトルを $\boldsymbol{r}'_i$ とすると，位置ベクトルとの関係は，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_G + \boldsymbol{r}'_i$ である．重心の位置ベクトルを書き直してみると，

$$\boldsymbol{R}_G \equiv \frac{\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_i m_i(\boldsymbol{R}_G + \boldsymbol{r}'_i) = \boldsymbol{R}_G + \sum_i \frac{m_i}{M}\boldsymbol{r}'_i$$

となる．$M \neq 0$ であることから，$\displaystyle\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{0}$ でなくてはならない．重心のからみた位置ベクトルの総和はゼロになることがわかる．また，このことの直接の帰結として，$\displaystyle\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{r}}'_i = 0$ もいえる．
2-5(ハート型の花火) 花火が爆発するのは内力なので，外力の効果は地上で発射した後は重力と風の効果と空気摩擦力だけになる．風や空気抵抗がないとすると，鉛直方向にのみ重力が働くので，水平方向の重心の運動量は保存される．鉛直方向も重力しかない場合は完全に放物線運動になる．そのために素朴には球状の花火しかできないような気がする．球状の花火のために火薬を対称に積めたときに，球状の花火ができるのはこの運動量保存則の結果であると考えることが出来る．一方で，近年よく見られるハート型の花火は明らかに**球状**では無い．これは運動量保存則を破っている例なのだろうか?もちろん，そうでは無い．物理の基礎法則をそんなに簡単に捨ててもらっては困るし，逆に法則が間違っているように見えても，よく考えてみればそうでないことはしばしばある．ここでの例では，大きく二種類の解答が思い付く．一つは輝いている火薬の質量が**対称でない**こと，もう一つは我々が見えているものが**全ての質点でない**ことが挙げられる．前者は運動量保存を満たすように，質量の配分が調整することで，非対称なハート型を実現する．一方，後者の例では燃えている花火部分と燃えていなくて見えない部分を合わせて運動量が保存していればよい．