練習問題の解答例 (2007 年度版)

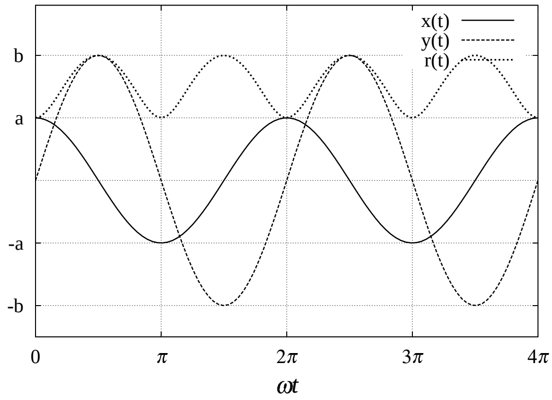
福島孝治 (東大院総合文化)

1 運動の記述

1.1 質点の位置ベクトル

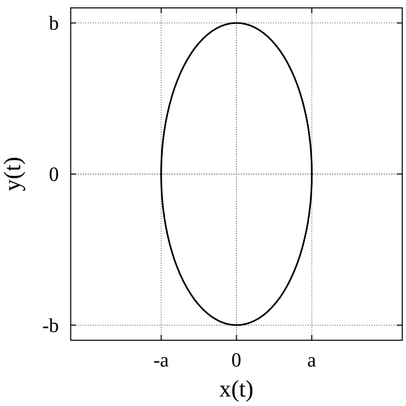
問 1.1-1

z 成分はなので，運動は xy 平面内で起こっている．時間の関数として，x 座標，y 座標をグラフに示してみる．横軸は ω を単位にとり，未定の定数 (a, b) は適当に設定することにした．x, y 座標ともに周期 $\frac{2\pi}{\omega}$ で振動していることがわかる[1]．



問 1.1-2

今度は，時間を媒介変数として，xy 平面上に描いてみる．上のグラフから，時々刻々の点を繋げてみると，右のように楕円になる．



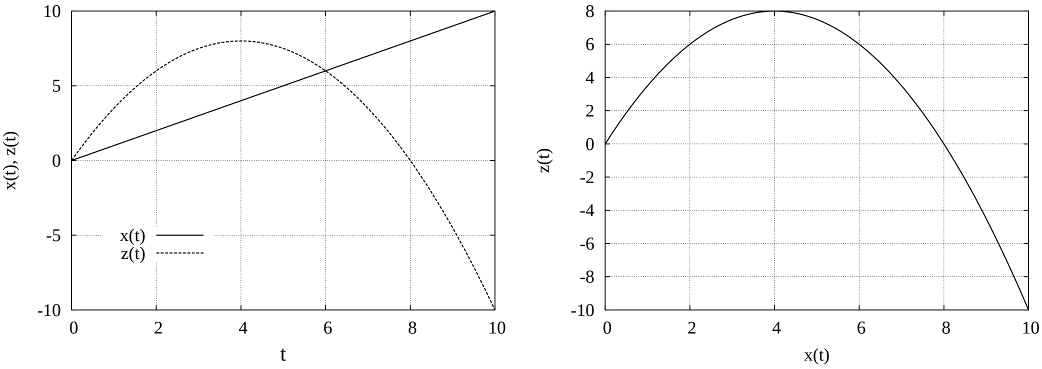
問 1.1-3 原点からの距離を $r(t)$ とすれば，

$$\begin{aligned} r(t) &= \left(a^2\cos^2(\omega t) + b^2\sin^2(\omega t)\right)^{1/2} = \left(a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2(\omega t)\right)^{1/2} \\ &= \left[\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{b^2 - a^2}{2} cos(2\omega t)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

[1] ここで周期とは，ある関数 $f(t)$ がある一定間隔でピークをもつときのその間隔のことを呼ぶ．振幅が一定のときは，$f(t) = f(t + T)$ が成り立つ T のうち最小のものを周期とする．

となることがわかる．これは a と b の間を周期 $\frac{\pi}{\omega}$ で振動する関数である．問 1-1-1 のグラフに $r(t)$ の結果も載せておいた．この関数の周期は $x(t)$ や $y(t)$ とは異なっていることは確認しておこう．

問 1.1-4 問題文では x，と y を書くことになっていたが，正しくは y ではなくて，z 座標である．上で行ったようなグラフを描いてみる．但し，ここでは，$a = 1., b = 4., g = 1.$ とした．



どのような運動かが想像できるだろうか．

1.2 速度ベクトル

問 1.2-1 微分に関数する以下の恒等式を示せ．

1. $$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x+\epsilon)^n - x^n}{\epsilon} = nx^{n-1}$$
   （ここで，二項定理 $(x+\epsilon)^n = x^n +_n C_1 x^{n-1}\epsilon +_n C_1 x^{n-2}\epsilon^2 + \cdots$ を用いた．）

2. (微分の合成則)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x+\epsilon)}{\epsilon} + \frac{f(x)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon} \right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)
\end{aligned}$$

3. [2] $y'(x) = (-\alpha)e^{-\alpha x}$.

[2] exp は指数関数のことである．この微分は高校のときにやったかな?例えば一つの方法として，指数関数をべき級数の和で書いてみると，

$$y'(x) = \left(e^{-\alpha x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n x^{n-1}}{(n-1)!} = (-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n x^n}{n!} = -\alpha e^{-\alpha x}$$

となることがわかる．

4. $y^{(n)}(x) = (-\alpha)^n e^{-\alpha x}$. ここで，$y^{(n)}(x)$ は関数 $y(x)$ を x で n 回微分したものとする．この指数関数は何回微分しても自分自身 (の定数倍) にもどって来る性質をもっている．
5. $y'(x) = \cos(x)^3$.
6. 3. の合成則を用いると，

$$y'(x) = (x^n)' \frac{1}{x+1} + x^n \left(\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{nx^{n-1}}{1+x} + x^n \frac{(-1)}{(1+x)^2} = \frac{nx^{n-1} + x^n(n-1)}{(1+x)^2}$$

7. 上の微分の合成則を n 回微分に一般化すると，

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m f^{(n-m)} g^{(m)}$$

となる[4]．ここで $f^{(m)}$ は f の x についての m 回微分を，${}_nC_m$ はコンビネーションを表す．$f(x) = x^n$, $g(x) = (1+x)^{-1}$ とすると，

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^n}{1+x} = \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m \frac{n!}{1+x}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^m = \frac{n!}{1+x}\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^n = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

．途中で任意の n に対して，二項定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m x^m y^{n-m}$ を使っている．

問 1.2-2

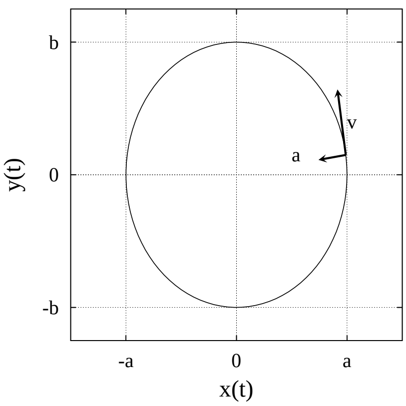
$$\boldsymbol{v} = (-a\omega \sin(\omega t), b\omega \cos(\omega t), 0)$$

1.3　加速度ベクトル

問 1.3-1

$$\boldsymbol{a} = (-a\omega^2 \cos(\omega t), -b\omega^2 \sin(\omega t), 0)$$

ある時刻の$\boldsymbol{v}$と$\boldsymbol{a}$を右図に示しておく．



問 1.3-2

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = a^2\omega^3 \sin(\omega t)\cos(\omega t) - b^2\omega^3 \sin(\omega t)\cos(\omega t) = (a^2 - b^2)\omega^3 \sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

[3]証明は一度くらいはやってみて，後はこの式は覚えてしまいましょう．sin の和の公式?$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$ を使うと，$\sin(x+\epsilon) - \sin(x) = \sin(x+\epsilon/2+\epsilon/2) - \sin(x+\epsilon/2-\epsilon/2) = 2\cos(x+\epsilon/2)\sin(\epsilon/2)$ となる．微分の定義から，

$$(\sin x)' = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\sin(x+\epsilon) - \sin(x)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{2\cos(x+\epsilon/2)\sin(\epsilon/2)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\cos(x+\epsilon/2)\sin(\epsilon/2)}{\epsilon/2} = \cos(x)$$

となる．最後の等式はロピタルの定理を使う．

[4]これは帰納法で証明できる．

となる．加速度ベクトルは常に原点を向いていて，速度ベクトルは楕円の接線方向を向いている．$a = b$ の場合 (円運動) は常にゼロになるので，速度と加速度は直交しているが，$a \neq b$ の場合は二倍周期で振動する．

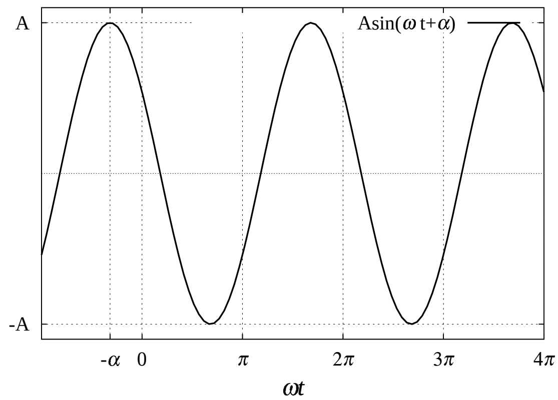
問 1.3-3 速度・加速度の x 成分はそれぞれ,

$$v(t) = x'(t) = gt, \qquad a(t) = v'(t) = g$$

である．

問 1.3-4

$x(t)$ のグラフを右図に示す．これも周期 $2\pi/\omega$ の振動だが，振動の原点が α だけずれていることに注意したい．



速度・加速度の x 成分はそれぞれ,

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \alpha),$$

$$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$$

である．

1.4 次元

問 1.4-1 講義で説明したように，長さと時間の次元をそれぞれ L，T とすると，[速度] $=L/T$, [加速度]$=L/T^2$ となる．

問 1.4-2 左辺と右辺の次元を勘定することにより,

$$[a] = L, \quad [b] = L/T, \quad [c] = L/T^2$$

となることがわかる．例えば，位置が時間の関数として与えられたときに，それぞれの時間のベキ関数の係数は，長さ，速度，加速度の次元を持つ．

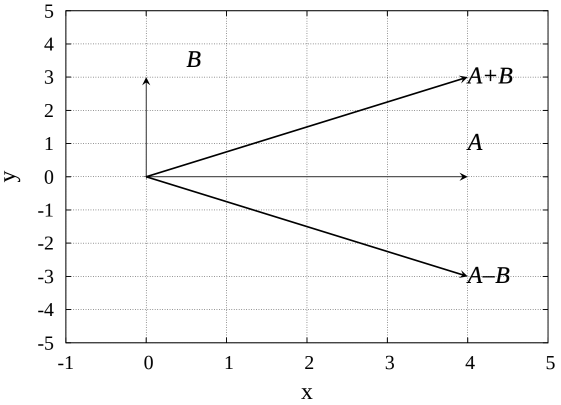
1.5 ベクトルの演算

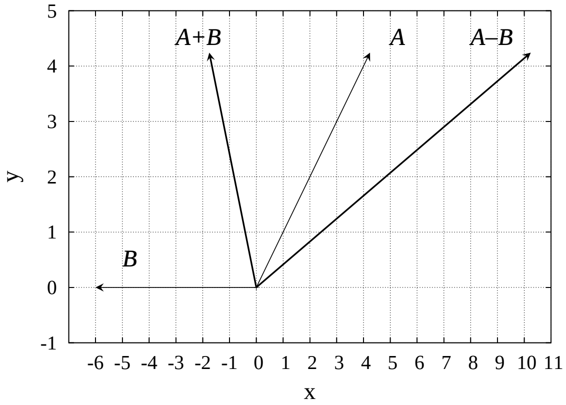
問 1.5-1

ベクトルの大きさは，共に 5.

問 1.5-2

ベクトル $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A} = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 0)$ であり，ベクトル $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B} = (-6, 0, 0)$．大きさはそれぞれ $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = 6(2 - \sqrt{2})^{1/2}$, $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}| = 6(2 + \sqrt{2})^{1/2}$.





問 1.5-3 3 つのベクトルが与えられている．$\boldsymbol{A} = (2, 3, -4)$, $\boldsymbol{B} = (2, -2, 2)$, $\boldsymbol{C} = (-1, 2, 1)$.

1. ベクトル$\boldsymbol{B}$の大きさは，$|\boldsymbol{B}| = \sqrt{3 \times 2^2} = 2\sqrt{3}$ なので，単位ベクトルは，$\dfrac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
2. $\boldsymbol{D} = (4, 1, -2)$, $\boldsymbol{E} = (2, 8, -10)$ なので，$\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} = 8 + 8 + 20 = 36$.
3. $\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{E}$の外積を求める．$\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{E} = (-10 + 16, -4 + 40, 32 - 2) = (6, 36, 30)$.
4. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (2, 3, -4) \cdot (-6, -4, 2) = -32$.

問 1.5-4 右辺の定義が左辺に等しいことを示します．先ずは左辺から，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) &= \frac{d}{dt}(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\
& \quad \text{それぞれの項に微分の合成則をあてはめればよい} \\
&= \left(\frac{d}{dt}A_x\right) B_x + A_x \left(\frac{d}{dt}B_x\right) + \left(\frac{d}{dt}A_y\right) B_y + A_y \left(\frac{d}{dt}B_y\right) + \\
& \quad \left(\frac{d}{dt}A_z\right) B_z + A_z \left(\frac{d}{dt}B_z\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right) \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}\right)
\end{aligned}
$$

となる．

問 1.5-5 $a=b$ として，

$$\boldsymbol{x}=(a\cos\omega t-a\omega\delta t\sin\omega t, a\sin\omega t+a\omega\delta t\cos\omega t, 0)$$

図では 1.3-1 で，位置ベクトルと速度ベクトルを足せばよくて，その合計ベクトルは少しだけ時間が経過した $(t+\delta t)$ 位置ベクトルに近い．

捕捉:ベクトル積の方向と大きさ

任意の 2 つの 3 成分ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$からベクトル積で作られるベクトル$\boldsymbol{C}$の性質について考える．

方向： このベクトル$\boldsymbol{C}$の方向は，$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$に垂直であることがわかる．そのためには，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=0$ を示せばよい[5]．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(,A_y,A_z)\cdot(A_yB_z-A_zB_y, A_zB_x-A_xB_z, A_xB_y-A_yB_x)\\ &= A_x(A_yB_z-A_zB_y)+A_y(A_zB_x-A_xB_z)+A_z(A_xB_y-A_yB_x)\\ &= 0\end{aligned}$$

同様に $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=0$ も示される．二つのベクトルに垂直な方向は唯一に決まる．つまり，ベクトル$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$で張られる面に対する法線方向である．

大きさ： 大きさを調べるためには次のベクトルの公式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$$

が便利である[6]．これより，A,B をそれぞれ$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$の大きさ，θ を二つのベクトルのなす角として，

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = (A^2B^2-AB\cos^2\theta)^{1/2}=AB\sin\theta \tag{1}$$

であることがわかる．これは図に描いてみるとわかるが，ちょうど $\boldsymbol{A}$ と$\boldsymbol{B}$でできる平行四辺形の面積に等しい．

[5] 内積は二つのベクトルのなす角を θ として，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$ と表せることに注意しよう．2 つのベクトルが垂直のときは $\cos\pi/2=0$ である．

[6] これが成り立つことを証明せよ．

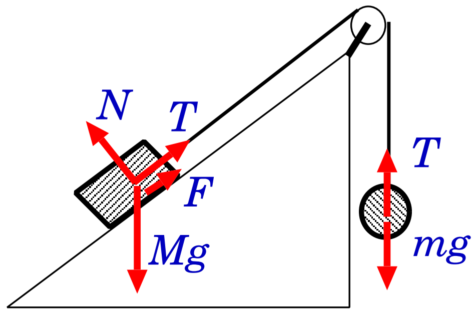
2　運動の 3 つの法則

2.1　第一の法則

問 2.1-1

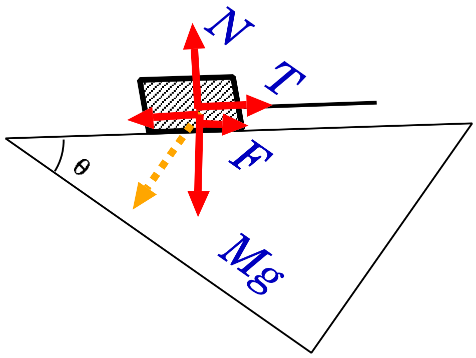
まず，丸いおもり (重さを m とする) にかかる力を考える．それらは以下の 2 つである．

1. 重力 ： mg
2. 張力 (糸が引っ張る力)：T



方向は右図に示す通りである．今，このおもりは静止しているので，この二つの力は**つり合っている**．方向はちょうど反対を向いているので，その大きさが等しいことがわかる．つまり，$mg = T$.
次に，四角いおもりに働く力は，質量を M として，

1. 重力：Mg
2. 張力 (糸が引っ張る力)：T
3. 垂直効力 (斜面がおもりを押す力)：N
4. 摩擦力：F



ここでもやはり力はつり合っている．その条件を見ておく．そのためには，力 (これはベクトル) を斜面に水平方向と垂直方向に分解するのがよい．斜面と水平面のなす角を θ とする．右には斜面を水平にした図を描いた．斜面方向と垂直方向に働く力は，垂直効力と重力であり，その力のつり合いはの式は

$$N = Mg\cos\theta$$

また，水平方向の力のつり合いは，

$$T + F = Mg\sin\theta$$

問 2.1-2 力の分解とつり合いを正しく理解する練習である．

1. 問題文のように，力を水平方向と垂直方向に分解して，それぞれのつり合いの式を書く．

$$\begin{aligned} \text{水平}\quad F_1\sin\theta_1 &= F_2\sin\theta_2 \\ \text{垂直}\quad Mg &= F_1\cos\theta_1 + F_2\cos\theta_2 \end{aligned}$$

2. 上の条件より，

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}$$

であり，$\theta_2 > \theta_1$ ならば，$F_1 > F_2$ となる．つまり，角度が大きい方が楽をしていることになる．

2.2 第二の法則

問 2.2-1

1. $z(t)$ を t 関数として，最大値を求めればよい．

$$z'(t) = v_0 - gt = 0$$

より，最高点に達する時間 t^* は $t^* = \frac{v_0}{g}$．ここで初速度 v_0 が正であることが大事である．また，この条件は速度が 0 になる条件でもある．ボールを投げあげたときに，ちょうど最高点では速度は 0 になっている．最高到達点は，

$$z(t = t^*) = z_0 + \frac{v_0}{g^2} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

となる．

2. 再び初期位置に戻って来たのであるから，その時刻を t_1 とすると，

$$z(t_1) = z_0 = z_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2$$

が，その条件式で，$t = 0$ でない解は，$\frac{2v_0}{g}$ である．その時の速度は，

$$v(t = t_1) = v_0 - g t_1 = v_0 - g\frac{2v_0}{g} = -v_0$$

となる．ちょうど，投げ上げたときと逆向きで同じ大きさの速さで落ちて来たことになる．

3. グラフはやはり自分で描いてみよう．そして，意味を考えておこう．

問 2.2-3

1. ここでは大雑把に評価してみる．マウンドの高さは考えないことにして，水平方向に初速度が与えられたとする．135km/h での等速直線運動しているボールが 17m 進むための時間は，

$$T = \frac{x}{v} = \frac{17m}{135km/h} = \frac{17m}{135 \times 10^3 m/3600sec} \simeq 0.45sec$$

2. その間に垂直方向には自由落下しているとすると，垂直方向の初速度を 0 として，落下距離は，

$$z = \frac{1}{2}gt^2 = 0.5 \times 9.8 \times (0.45)^2 \simeq 1.00m$$

おおよそ 1m 落下していることになる．

問 2.2-4 ここでは運動がわかっているとして，力を求めてみることにする．x 方向の座標が与えられているので，そこから x 方向の加速度 $a_x(t)$ を求めてみる．

1.
$$v_x(t) = t + gt \quad \Longrightarrow \quad a_x(t) = g$$
このとき，$F_x = mg$ となり，x 方向に一定の力が働いていることになる．

2.
$$v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \Longrightarrow \quad a_x(t) = -A\frac{k}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$
この質点に働く力は $F_x = -Ak\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = -kx$ である．これは位置に比例して，逆向きの力である．原点から離れる程に原点方向に引き戻そうとする力が大きくなるわけである．これはバネ運動を表している．

2.3 質量と力の次元

問 2.3-1 左辺の次元は時間 T である．一方で，右辺は，

$$[\sqrt{l/g}] = \sqrt{L/(L/T^2)} = \sqrt{T^2} = T$$

となり，右辺も T となり，等式が成り立っている．

問 2.3-2 これは力の次元なので，$[MLT^{-2}]$ である．次元の式を書いてみると，

$$MLT^{-2} = [G]\frac{M^2}{L^2} \quad \Longrightarrow \quad [G] = \frac{L^3}{M}T^{-2}$$

となる．

問 2.3-3 力積は運動量の次元と同じであるので，$[p] = [mv] = MLT^{-1}$．一方で，力積 $\boldsymbol{I}$ の定義は，

$$\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{F}dt$$

であることから考えると，力×時間の次元を持っていることがわかる．このことを確かめてみると，

$$[\boldsymbol{F}][t] = MLT^{-2} \times T = MLT^{-1}$$

となり，やはり，上の次元と同じであることがわかる．