

第一回物理学Bレポート問題の解答例

問題 1 「ベクトル演算 1」:

問題の趣旨: この問題はとにかく手を動かしてベクトル演算になれてもらうことが趣旨でした.

1. 定義どおりに計算してみる. まず

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = (-2, 3, 4) \times (1, 1, -2) = (-6 - 4, 4 - 4, -2 - 3) = (-10, 0, -5)$$

であり, 求めたい式は,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = (3, 2, 0) \cdot (-10, 0, -5) = -30$$

となる.

2. これも問題どおりに代入して計算する.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (8, -12, 13) \times \mathbf{C} = (11, 29, 20)$$

3. ベクトルの一般公式を示しておく. 愚直に左辺と右辺が等号関係であることを示す. ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{Q}$ をそれぞれ, $\mathbf{P} = (p_x, p_y, p_z)$, $\mathbf{Q} = (q_x, q_y, q_z)$ とおく.

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (p_y q_z - p_z q_y, p_z q_x - p_x q_z, p_x q_y - p_y q_x)^2 \\ &= (p_y q_z - p_z q_y)^2 + (p_z q_x - p_x q_z)^2 + (p_x q_y - p_y q_x)^2 \\ &= p_x^2 (q_y^2 + q_z^2) + p_y^2 (q_x^2 + q_z^2) + p_z^2 (q_x^2 + q_y^2) - 2(p_y q_z p_z q_y + p_z q_x p_x q_z + p_x q_y p_y q_x) \\ &= (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) - p_x^2 q_x^2 - p_y^2 q_y^2 - p_z^2 q_z^2 \\ &\quad - 2(p_x q_x p_y q_y + p_y q_y p_z q_z + p_z q_z p_x q_x) \\ &= |\mathbf{P}|^2 |\mathbf{Q}|^2 - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})^2 = \text{右辺} \end{aligned} \quad (2)$$

と示すことが出来る.

4. ここでは一般的に $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ が平行六面体^cの体積になることを示そう. まず, ベクトル $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ を $\mathbf{D}$ とおくと, ベクトル $\mathbf{D}$ の方向は $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ に垂直で, 大きさはその2つのベクトルで書かれる平行四辺形の面積である. 向きは講義でも話したので, ここでは大きさ $|\mathbf{B} \times \mathbf{C}|$ について, 調べておこう. そのためには前問の結果を使って,

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}|^2 &= |(\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})| = ||\mathbf{B}|^2 |\mathbf{C}|^2 - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^2| \\ &= B^2 C^2 - B^2 C^2 \cos^2 \phi = B^2 C^2 \sin^2 \phi = B^2 (C \sin \phi)^2 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで ϕ は $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ のなす角であり, B の大きさを簡単に B と書いた. 図に書いてみるとわかるが, これはちょうど $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ でできる平行四辺形の面積に等しい.

^c問題文には“平向6面体”となっているが, もちろん正しくは「平行六面体」である.

この D と A との内積は、2つのベクトルのなす角を θ とすると、 $A \cdot D = |A||D| \cos \theta$ と書ける。 $A \cos \theta$ は D への射影であるから、平行四辺形に対する高さである。結局、 $A \cdot D$ は平行六面体の体積であることがわかる。

問題 2 「ベクトルの微分」:

問題の趣旨: この問題は微分の復習が趣旨です。

これはベクトルの恒等式なので、右辺の x 成分の定義が左辺にそれに等しいことを示す。まずは左辺から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (A \times B)_x &= \frac{d}{dt} (A_y B_z - A_z B_y) \\ &\text{それぞれの項に微分の合成則をあてはめればよい} \\ &= \left(\frac{d}{dt} A_y \right) B_z + A_y \left(\frac{d}{dt} B_z \right) - \left\{ \left(\frac{d}{dt} A_z \right) B_y + A_z \left(\frac{d}{dt} B_y \right) \right\} \\ &= \left(\frac{d}{dt} A_y \right) B_z - \left(\frac{d}{dt} A_z \right) B_y + \left\{ A_y \left(\frac{d}{dt} B_z \right) - A_z \left(\frac{d}{dt} B_y \right) \right\} \\ &= \left(\left(\frac{d}{dt} A \right) \times B \right)_x + \left(A \cdot \left(\frac{d}{dt} B \right) \right)_x \end{aligned}$$

となる。 y 成分、 z 成分についても同様に示すことができる。

おまけ: これはベクトルの恒等式だが、この関係式は物理の問題として面白い性質を持っている。2つのベクトルをそれぞれ $A = r$ 、 $B = p$ とする。ここで、 r は位置ベクトルであり、 p は運動量ベクトルである。このときに上の関係式を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r \times p) &= \left(\frac{d}{dt} r \right) \times p + r \times \left(\frac{d}{dt} p \right) \\ &\text{ここで、} \frac{d}{dt} r = \frac{p}{m} \text{ は} p \text{に平行であり、第一項はゼロになる}^d。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{また、第二項に運動方程式} \frac{d}{dt} p = F \text{ を用いると} \\ &= r \times F \end{aligned}$$

ここで、 F が r に平行な力だと右辺はゼロになる^e。例えば、万有引力や電気力であるクーロン力はこのような例である。このとき、この式は運動量の保存則と似たような式になり、 $r \times p$ なる量が時間に依存しない、つまり保存することがわかる。この量は角運動量と呼ばれる量であり、これは角運動量の保存則と呼ばれる法則である。

例えば、質量 m の質点が半径 a の等速円運動をしているとする。定数 ω で位置ベクトルは $r = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, 0)$ で与えられる。運動量ベクトルは、 $p = (-m a \omega \sin \omega t, m a \omega \cos \omega t, 0)$

^d2つの互いに平行なベクトル同士のベクトル積はゼロである。

^eこの条件の満たす力は特に中心力と呼ばれる。

である．このとき，角運動量 $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ を求めてみよう^f．それは時間に依存せずに定数になっている．そのことは力ベクトルが位置ベクトルに平行であることから分かる．

万有引力の法則に従う力の働く質点はこの角運動量が保存している．ケプラーの第二法則は面積速度一定の法則と呼ばれているが，実は面積速度がこの角運動量に比例している．このことから，ケプラーの第二法則のような運動には万有引力が働いていると考えることが自然であることがわかる．

問題 3 「力?」:

問題の趣旨: この問題は運動の軌跡と力の関係を認識することが趣旨です．

この運動は $-y$ 方向に重力が働いている落下運動である． $v > 0$ であるとして，位置ベクトルの各成分をそれぞれ $x(t), y(t), z(t)$ とすると，

$$y(t) = vt - \frac{1}{2}gt^2 = x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 = -\frac{g}{2v^2}\left(x - \frac{v^2}{g}\right)^2 + \frac{v^2}{2g}$$

となり，確かに二次曲線，すなわち放物運動であることがわかる．

1-(a),(c) 速度ベクトルを求めると，

$$\mathbf{v}(t) = (v, v - gt, 0)$$

であり，その大きさは，

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v^2 + (v - gt)^2}$$

となる．この大きさが最小になるのは， $v - gt = 0$ になるときである．求める t_1 はこれを解いて，

$$t_1 = \frac{v}{g}$$

である．さて，この時刻 t_1 は速度の y 成分が 0，すなわち正から負になるときのなので，ちょうど最高到達点であることがわかる．そのときに速度は時間に依存しない x 成分だけになる．とてももっともな結果である．

1-(b) 加速度ベクトル $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\mathbf{v} = (0, -g, 0)$$

である．

1-(d)

質量は m なので，ニュートンの第二法則より，力ベクトル $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = (0, -mg, 0)$$

となる．

^f答えは， $(0, 0, ma^2\omega)$ ．

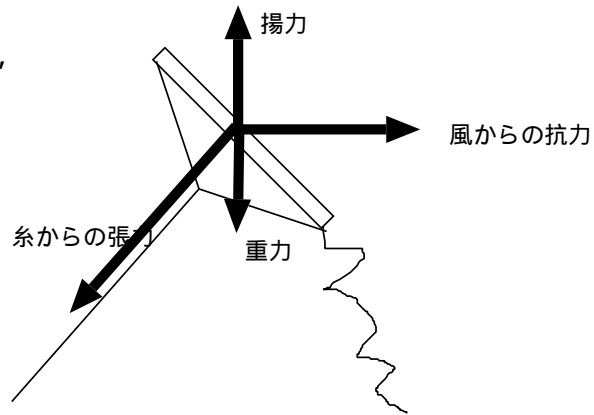
この放物運動を導く力は y 方向に時間に依存しない力が働いているのであった．力はベクトルであることに注意されたい．

2

この問題は，質点の考え方を広くもつことの練習である．

例えば、空に上げる凧の運動を考えてみる．

凧にどんな力が働いているかはちょっと難しいが，まずは重力と，風から受ける抗力と，凧の表と裏の圧力差から生じる揚力，それから糸が引っ張る張力である．図を書くと右のような感じであろうか．凧が空で静止している時には，これらの力がちょうどつり合っている（ベクトルとしてゼロ）ことになる．抗力と揚力は大きさを持たない質点では考えられないが，質点という考え方は働く力を全て考慮した後の理想化した概念であることに注意しよう．



実は物体の基本的な運動の多くは質点で記述できる．例えば講義で話をする空気抵抗のある落下運動やバネの運動はその典型例である．物体の運動をその重心に注目すれば，前問のように位置の時間変化は記述できる．そこから力は計算できるので，ブーメランでも，ティッシュペーパーの落下でも，中村俊輔のフリーキックでも原理的には記述できる．ただし，そのときの力に対して，いつでも何かしらの合理的な説明が与えられるかどうかは明らかではない．そうすると，力と運動量変化の関係を表しているニュートンの第二法則はお互いを補間し合っていて，堂々巡りになっている気がするかもしれない．さまざまな現象を考えると，運動を見て初めて力が分かることも少なくない（見知らぬ運動を目の当りにすると，いつでもこのような状況に陥る）．しかし，それらの知見を凝集して，共通する力の性質や、その力の正体がよく理解できたとき，我々はまた賢くなったと思えるし，その力を他に利用することができるはずである．物理学はそのような積み重ねで発展してきた学問である．力の正体は力学の範囲を越えることはあるが，物理の問題としてわかっていることもある．例えば，空気抵抗のストークスの理論がその例である．

一方で，決定的に質点力学でダメなのは物体が変形したり，回転したりする場合である．そのときは力学をさらに，流体力学や剛体力学に進化させる必要がある．回転する卵が立ち上がったたり，跳び上がったたりすることを理解するためには，質点を越えた記述が必要である．Rattle back も同様である．