

3 運動方程式の解法

3.1 放物運動

問 3.1-1 鉄砲の発射位置を原点 $(0,0)$ として, 的の初期位置の x 座標を x_T とする. 水平面からの的を見上げる角度を θ とすると, 的の初期位置の y 座標 y_T は, $y_T = x_T \tan \theta$ と表される. 球を発射してから, すなわち的を落下させてから, 時刻 t だけ経ったときの的の位置は, $(x_T, x_T \tan \theta - \frac{1}{2}gt^2)$ である.

一方, 球は的を狙って初速 v_0 で発射するので, 時刻 t 後の位置 (x_P, y_P) は,

$$\begin{aligned}x_P &= (v_0 \cos \theta)t \\y_P &= (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \theta - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

となる. 球がちょうど x_T に到達したときの, y 座標について, $y_T = y_P$ になっていることがわかる. つまり, 衝突することがわかる. 2 ところがそもそも球が x_T に届かなければ, 衝突はおこらない. $y_P > 0$ の範囲で x_T に到達する条件は, $t > 0$ であることに注意をすれば,

$$0 < v_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt = v_0 \sin \theta - \frac{1}{2}g \frac{v_0 g}{\sin \theta} \implies \underline{v_0 \sin \theta > \frac{1}{2}g \frac{x_T}{v_0 \cos \theta}}$$

であることがわかる.

3.2 微分方程式のいくつかの解法

問 3.2-1 次の微分方程式を解け.

これらの問題はいずれも変数分離形になっている例題である. 積分定数は C とする.

(1) 変数分離の形にもっていく.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} &= 1 \rightarrow \int dx \frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = \int dx 1 \\&\downarrow \quad \text{変数変換をする} \left(dy = \left(\frac{dy}{dx} \right) dx \right) \\ \int dy \frac{1}{1+y^2} &= \int d(\tan t) \frac{1}{1+\tan^2 t} \Rightarrow \int dt \frac{1}{\cos^2 t} \frac{\cos^2 t}{1} = t = \tan^{-1} y = x + C \\&\underline{y = \tan(x + C)}\end{aligned} \tag{5}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int dy \frac{1}{1+y^2} &= \int dx \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C \\ &\Rightarrow \underline{y = \tan(\tan^{-1} x + C)}\end{aligned}\quad (6)$$

(3)

$$\begin{aligned}\int dy \frac{1}{(1+y)^2} &= \int dx \frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow -(1+y)^{-1} = -(1+x)^{-1} + C \\ &\Rightarrow \underline{y = \frac{x + (1+x)C}{1 - C(1+x)}, \text{その他にも } y = -1}\end{aligned}\quad (7)$$

問 3.2-2 次の微分方程式を解け .

これは変数分離に帰着できるタイプの問題である . ヒントに従ってやればよい .

(1) $u = y - x$ より , $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} + 1 &= \frac{u+2}{u+4} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+2}{u+4} - 1 = \frac{-2}{u+4} \\ \int du(u+4) &= \int dx(-2) \rightarrow u^2/2 + 4u = -2x + C \rightarrow u^2 + 8u + 4x = C \\ u &= -4 \pm \sqrt{16 - 4x + C} \Rightarrow \underline{y = x - 4 \pm 2\sqrt{4 - x + C/4}}\end{aligned}\quad (8)$$

(2) $y = ux$ より , $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$

$$\begin{aligned}x\frac{du}{dx} + u &= \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = u - \sqrt{1 + u^2} \rightarrow \frac{du}{dx} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{x} \\ \int du \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} &= -\int dx \frac{1}{x} \rightarrow (u = \sinh t) \text{ とおく}^9 \\ \int d(\sinh t) \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} &= \int dt \cosh t \frac{1}{\cosh t} = t \quad \sinh^{-1} u = -\log x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= x \sinh(-\log x + C) = \frac{x}{2} (e^{-\log x + C} - e^{+\log x - C}) \\ &= \frac{x}{2} \left(\frac{e^C}{x} - \frac{x}{e^C} \right) = \frac{1}{2} \left(C' - \frac{x^2}{C'} \right)\end{aligned}\quad (9)$$

問 3.2-3 次の2階の微分方程式を解け .

⁹双曲線関数たち $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (hyperbolic cosine), $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $(\sinh x)' = \cosh x$, $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} = \frac{d}{dx} \log(\cosh x)$

これらはどれも斉次方程式であり，特性方程式の方法を用いて解くことができる．

(1) 特性方程式： $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0, \rightarrow (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0, \rightarrow \lambda = -2, -3$ より，どちらも実数解であるときの一般解は，

$$y(x) = C_1 \exp(-2x) + C_2 \exp(-3x) \quad (10)$$

(2) 特性方程式： $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0, \rightarrow \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$ より，このときの一般解は，

$$y(x) = C_1 \exp\left((-1 + i\sqrt{2})x\right) + C_2 \exp\left((-1 - i\sqrt{2})x\right) = e^{-x} \left(C_1 e^{+i\sqrt{2}x} + C_2 e^{-i\sqrt{2}x}\right). \quad (11)$$

オイラーの公式¹⁰を用いると，

$$y(x) = e^{-x} \left((C_1 + C_2) \cos(\sqrt{2}x) + i(C_1 - C_2) \sin(\sqrt{2}x)\right)$$

となり，これが実数であるためには $C_1 = C_2^*$ でなくてはならない¹¹．

(3) 特性方程式は， $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$ となり，重解を持つ．この時の一般解は¹²，

$$y(x) = e^{-3x} (C_1 + C_2 x) \quad (12)$$

となる．

問 3.2-4

特性方程式は， $\lambda^2 - 4\lambda + 7 = (\lambda - 2)^2 + 3 = 0$ であり，その解は $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}i$ である．一般解は，定数を C_1, C_2 として，

$$x(t) = C_1 e^{(2+\sqrt{3}i)t} + C_2 e^{(2-\sqrt{3}i)t}$$

である．初期条件を満たす条件は，

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ 7 &= C_1(2 + \sqrt{3}i) + C_2(2 - \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

となり，解くと， $C_1 = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{3}i), C_2 = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3}i)$ である．これらは複素共役の関係があるので， $x(t)$ は実数になる．実際に代入してみると，

$$x(t) = e^{2t} \left(2 \cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t)\right) \quad (13)$$

となる．

¹⁰ $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

¹¹ 複素共役：実数 x, y に対して，複素数 $z = x + iy$ とすると，その複素共役 z^* は， $z^* = x - iy$ で定義される．

¹² この理由は以前のページを参照して欲しい．

問 3.2-4

この問題はある種の人口問題のモデルである．最も有名なマルサス (Malthus) の法則¹³に改良を加えたのが今回のモデルである．この微分方程式は Pearl-Read の Logistic equation と呼ばれている．

(1): さて，まずはこの微分方程式を解くことにする．この方程式は変数分離で簡単に解くことができる．

$$\frac{dx}{dt} \frac{1}{x(A-x)} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{A-x} \right) \frac{dx}{dt} = k$$

$$\log(x) - \log(A-x) = \log\left(\frac{x}{A-x}\right) = kAt + C$$

初期条件として， $x(t=0) = x_0$ とすると，

$$x(t) = \frac{Ax_0 e^{kAt}}{A - x_0 + x_0 e^{kAt}} \quad (14)$$

となる．

(2): $A, k > 0$ として，具体的に $A = 50, k = 0.025$ として，幾つかの初期条件に対して，グラフを書いてみた．

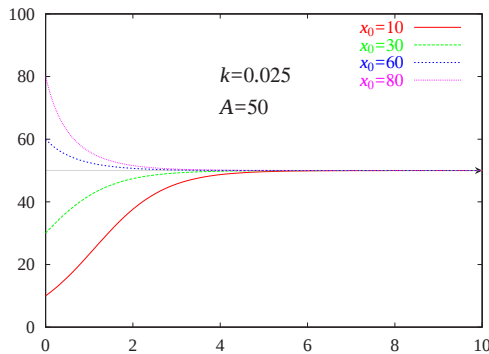


図 2: $A, k > 0$ の場合: 初期の値 x_0 によらず，長時間極限では A の値に収束している．

(3): $A, k > 0$ の場合には，

$$x(t) = \frac{A}{1 + (A/x_0 - 1)e^{-kAt}} \quad (15)$$

となり，この解は，長時間極限で A に収束することがわかる．つまり， A は長時間極限への収束値を意味しており， kA は収束値 A に近づく時間スケールを決めている．

$k < 0$ の場合は，初期値 x_0 と A の大小関係で， $A > x_0$ ならば必ず $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ になる「絶滅」が起き， $A < x_0$ では有限の時間 t で x が無限大になる「人口爆発」が起きる．

¹³ 「ある生物の個体群を考え，その数を x としたときに，単位時間辺りの出生率を n ，死亡率を m としすると，

$$\dot{x} = nx - mx = (n - m)x$$

と表せる．ここで $a = n - m$ をマルサス係数と呼ぶ．」

3.3 抵抗があるときの落下運動

問 3.3-1

これはレポート問題なので，後で解答する．

問 3.3-2

この問題の趣旨は，線形でない微分方程式の解き方と，粘性抵抗中の落下運動との違いを調べることである．

この問題では抵抗係数 $k > 0$ として，落下運動に限定している¹⁴．この運動方程式は右辺の第二項に $v_z = dz/dt$ の二乗の項を含んでいて，もはや線形ではない¹⁵．これは非線形微分方程式である．初期条件は，時刻 $t = 0$ で，位置 $z = 0$ ，速度 $v = 0$ とする．解くべき方程式は，

$$\frac{d^2}{dt^2}z = -g + \frac{k}{m} \left(\frac{d}{dt}z \right)^2 \quad (16)$$

これは一度速度 v の満たす方程式に書き直すと，変数分離の形をしている．

$$\frac{d}{dt}v = -g + \frac{k}{m}v^2 \quad (17)$$

$$\int_0^v dv' \frac{1}{g - \frac{k}{m}v'^2} = \int_0^t dt' (-1) \quad (18)$$

↓ $mg/k = A^2$ とおくと，左辺の被積分関数は，

$$\downarrow \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{1}{\frac{k}{m}(A^2 - v^2)} = \frac{m}{k} \frac{1}{2A} \left(\frac{1}{A+v} + \frac{1}{A-v} \right)$$

↓ 両辺の積分する．

$$\frac{m}{2Ak} [\log(A+v') - \log(A-v')] \Big|_0^v = \frac{m}{2Ak} \log \left(\frac{A+v}{A-v} \right) = -t \quad (19)$$

v について解く．

$$\frac{A+v}{A-v} = \exp \left[-\frac{2Ak}{m}t \right] \Rightarrow v = -A \frac{1 - \exp(-2\frac{Ak}{m}t)}{1 + \exp(-2\frac{Ak}{m}t)} = -\sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t \right). \quad (20)$$

もう一度積分をすることで位置 z に時間発展が得られる．

$$\begin{aligned} \int_0^z dz' &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t dt' \tanh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t' \right). \\ z(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t dt' \frac{1}{\sqrt{\frac{kg}{m}}} \frac{d}{dt'} \log \cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t' \right). \\ &= -\frac{m}{k} \log \cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t' \right) \Big|_0^t = -\frac{m}{k} \log \cosh \left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t \right) \end{aligned} \quad (21)$$

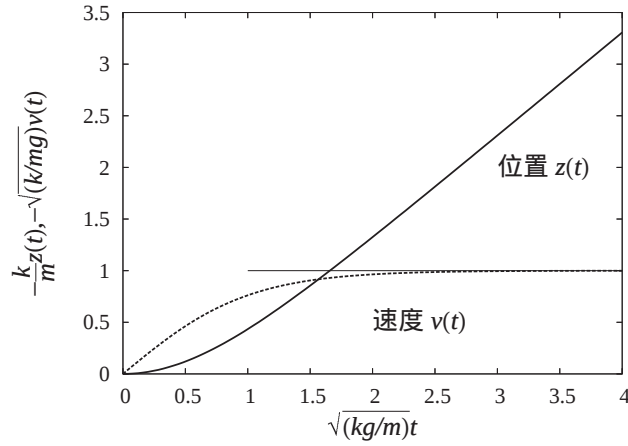


図 3: 位置と速度を時間の関数として描いてみる．縦軸と横軸は適当な変数で規格化している．

幾つかの特徴的な性質を見ておく．

終端速度: 終端速度 v^* は運動方程式の釣り合いの条件からすぐわかる．終端速度では速度の変化はもはやないので, 左辺は 0 になる．これは右辺の力が釣り合っていることをいみする．右辺=0 を解くことで, 終端速度の大きさ (向きは下向き) $v^* = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ がわかる．以下ではすぐわかることを見てみる．

特徴的な時間: 終端速度への近付き方からわかるように, この運動の特徴的な時間¹⁶ τ は, $\tau = \sqrt{m/kg}$ になっている．

時間が長い極限 ($t \gg \tau$): この極限では, $\log \cosh(\alpha t) = \log \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \simeq \log(\exp(\alpha t)/2) \simeq \alpha t$ なので,

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k} \sqrt{\frac{kg}{m}} t = -v^* t \quad (22)$$

終端速度での等速運動になっていることがわかる．

時間が短い極限 ($t \ll \tau$): 時間 t が小さいとして, 展開する．

$$\begin{aligned} \cosh \alpha t &\simeq 1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 + \frac{1}{4!}(\alpha t)^4 + O(t^6) \\ \log \cosh(\alpha t) &\simeq \log' \left(1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 \right) \simeq \frac{1}{2} \alpha^2 t^2 \end{aligned} \quad (23)$$

¹⁴ 上昇する場合は $k < 0$ になる．

¹⁵ 微分方程式の 2 つの解 z_1 と z_2 を持ってきたとき, それらの線形結合 $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ もまたその解になっているときに, その方程式は線形という．

¹⁶ ここで特徴的な時間とは, 終端速度へ近づく目安となる時間スケールのことで, 例えば指数関数 ($e^{-t/\tau}$) の時に時間の次元を持つ量 τ のことである．式 (21) では, $\log \cosh(\frac{t}{\tau})$ と書いたときの τ に相当する．

を使う¹⁷と,

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k} \frac{1}{2} \left(\frac{kg}{m} \right) t^2 = -\frac{1}{2} g t^2 \quad (24)$$

これは自由落下を意味している．これも当たり前．初期条件は速度 0 なので，速度の二乗に比例する抵抗力は運動の初期には影響は少ない．

位置と速度の関係だけを知りたい場合はもう少し簡単になる．微分の公式から，速度の時間微分 dv/dt は，

$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{dz}{dt} \frac{d}{dz} v(z) = v(z) \frac{d}{dz} v(z) \quad (25)$$

となるから，この式を代入すると速度 v の微分方程式 (17) は，

$$v \frac{d}{dz} v = -g + \frac{k}{m} v^2 \quad (26)$$

となる．この式もまた変数分離形になっているので，

$$\frac{v}{g - \frac{k}{m} v^2} dv = -dz \quad (27)$$

から積分すればよい．この先はみなさんへの宿題として残しておく．

3.4 ばねの振動

問 3.4-1

問題の趣旨：2 階の線形微分方程式を解いてみようということです．これは，バネの振動の問題と，速度に比例する抵抗の問題の合わせ技で，特性方程式を用いて解くときに，幾つかの状況が出て来る．また，問題では陽に初期条件を与えなかったのも，そこは自分で適当に設定し，答えを図にすることが出来るかも課題である．

この運動方程式の両辺を m で割り移行することで，

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \mu \frac{d}{dt} x + \omega^2 x = 0 \quad (28)$$

が出て来る．ただし， $\mu = \kappa/m$ ， $\omega^2 = k/m$ である．この微分方程式の特性方程式は，

$$\lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0 \quad (29)$$

である．一般解はその根の性質で分類される．

¹⁷ $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$

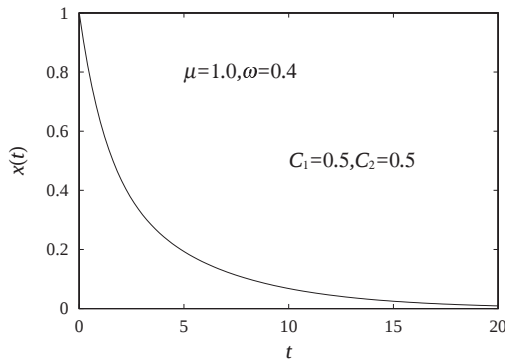


図 4: (i) の場合: 振動系の問題なのに振動しないのはなぜかという質問があったが, ここではとても摩擦が大きい状況に相当している.

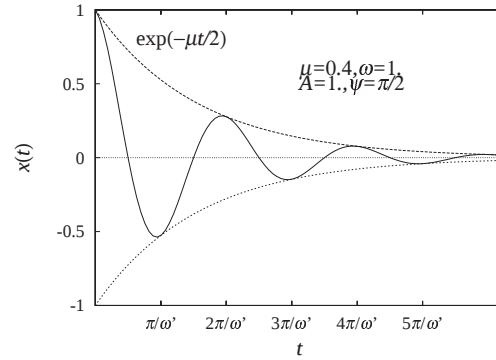


図 5: (ii) の場合: 振動の周期がよくわかるように横軸のスケールを書いておく必要がある. たまに周期がどんどん早くなっているようなグラフがあった. 振幅が減衰するので, 周期が早くなるような感じがするかもしれないが, それは誤解である. 周期はいつでも一定.

(i) $\mu^2 - 4\omega^2 > 0$: 抵抗力が大きい場合

このとき特性方程式の根は, α, β をそれぞれ

$$\alpha = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \beta = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (30)$$

としたときに, 相異なる 2 つの負根 $-\alpha, -\beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) をもつ. 一般解は,

$$x(t) = C_1 \exp(-\alpha t) + C_2 \exp(-\beta t) \quad (31)$$

であり, 根がどちらも負であることから, 長時間極限では平衡点に収束する ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$)¹⁸. $x(t)$ が単調減少かどうかは初期条件に依存する. バネがのびる方向に初速度をもって引っ張れば一度伸びてから縮む. ただし, その場合でも $x(t) = 0$ を横切ることはない.

(ii) $\mu^2 - 4\omega^2 < 0$: バネ定数が大きい場合

特性方程式の根は虚数 $-\mu/2 \pm i\omega'$ になるから, 一般解は,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\mu/2 t} (C_1 \exp(i\omega' t) + C_2 \exp(-i\omega' t)) \\ &= e^{-\mu/2 t} ((C_1 + C_2) \cos(\omega' t) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega' t)) \\ &= A e^{-\mu t/2} \sin(\omega' t + \psi) \end{aligned} \quad (32)$$

¹⁸ たびたび見掛けた解答に「非周期的運動」とか「振動しない」とかがあった. これは説明になっていないのではないかなー. 振動しない, 非周期的運動ってとても沢山あって, 運動を特定していない. α, β が共に負であることを明示することは大切で, そうでないと, 発散する可能性もある. 一度はグラフで示してみるといろいろとわかる.

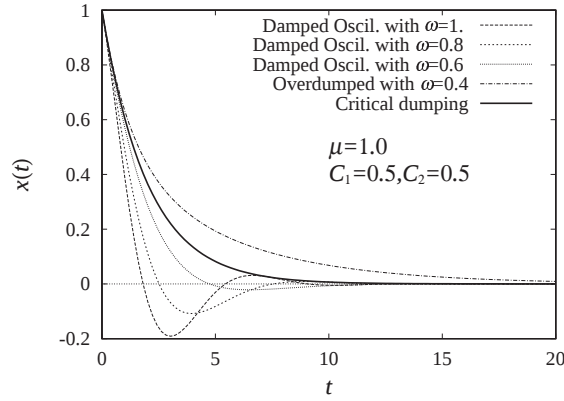


図 6: (iii) の場合: ちょうど, (i) と (ii) の境目なので「臨界」と呼ばれているのだろう. グラフには $\mu = 1$ として, ω を変えて書いてみた. ω を減らして振動運動しなくなるところがこの臨界減衰である.

である. ここで, $\omega' = \sqrt{4\omega^2 - \mu^2}/2$ であり, A, ψ は C_1, C_2 から決まる定数である¹⁹. 単振動と比べると, 振幅は指数関数的 $\exp(-\mu t/2)$ に減少し, 角振動数が ω から ω' に減っている. このような運動は減衰振動と呼ばれている. 時間とともに減衰するのは振幅であって, 角振動数あるいは周期ではないことに注意しよう.

(iii) $\mu^2 - 4\omega^2 = 0$: ちょうどつり合う場合

これは特性方程式が重根を持つときである. 一つの基本解は, $x_1(t) = \exp(-\mu t/2)$ であるが, このままでは一次独立な 2 つの関数が得られていない. そこで, $x(t) = A(t) \exp(\lambda t)$ とおいて, 改めて微分方程式に代入して, $A(t)$ の満たすべき条件を考えてみる. 元々の特性方程式も考慮すると, 条件は $\ddot{A} + (2\lambda + \mu)\dot{A} = 0$ となるが, $A(t) = t$ はその条件を満たす. 結果として, もう一つの基本解は $x_2(t) = t \exp(-\mu t/2)$ となることがわかる. 一般解は,

$$x(t) = e^{-\mu t/2}(C_1 + C_2 t) \quad (33)$$

となる. この運動は臨界減衰と呼ばれている²⁰.

¹⁹最後の式変形は少々ややこしいかもしれない. まず, ゴールは式 (32) のように指数関数的に減少する振幅を持つ振動関数に表したいとする. そのために,

$$C_1 = \frac{A}{2}e^{i\phi}, C_2 = \frac{A}{2}e^{-i\phi}$$

とする. この定義を用いると, 式 (32) の一つ前の式の C_1, C_2 は $C_1 + C_2 = A \cos \phi$, $C_1 - C_2 = A \sin \phi$ となる. 後は三角関数の合成則を使って式 (32) が出てくることを確かめてほしい. ここで, C_1, C_2 は複素数であるが, A, ϕ は実数であることに注意してほしい. 上の式は二つの時間に依らない定数 C_1, C_2 から二つの定数 A, ϕ への変換なのだが, 明らかに制限が加わっている. つまり, C_1, C_2 は勝手に選んでよい複素数だったのに, その大きさは等しくなっているというわけである. これは, $x(t)$ が任意の時刻で実数であることの条件から来ている. 実は勝手に選んでよいわけではなかったのである.

²⁰臨界とはギリギリという意味である. どうして臨界減衰なのかはグラフを書いてみればわかる (書かなくてもわかるが ...).