第二回物理学B レポート問題の解答例

問題 1 「ガリレオ実験」:

1-1 (斜面落下の運動方程式)

斜面に平行に，かつ物体が落ちる方向に x 軸をとることにする．斜面に平行方向に働く力は重力 $Mg\sin\theta$ だけなので，運動方程式は次のように表せる．

$$M\ddot{x} = Mg\sin\theta$$

1-2 (運動方程式の解)

解くべき微分方程式は,

$$\ddot{x} = g\sin\theta$$

である．この方程式は重力が $g' \equiv g\sin\theta$ の落下運動と全く同じである．落下運動の結果を使うことにする．初速 $v(t=0)=0$ であることに注意すると,

$$v(t) = (g\sin\theta)t$$

であり，位置は $t=0$ の位置を原点とすると,

$$x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2$$

である．

1-3 (落下時間と角度)

斜面を滑り終えた位置の x 座標は, $\dfrac{h}{\sin\theta}$ であるので，その時間を t^* とすると,

$$\frac{1}{2}(g\sin\theta)(t^*)^2 = \frac{h}{\sin\theta} \quad\Longrightarrow\quad t^* = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

となる．

1-4 (落下時間と質量)

この時刻 t^* は質量 M に全く依存しない．つまり，落下に必要な時間は M に依らず一定なのである．これがガリレオが発見したことである[g]．このことは，運動方程式が M に依存しないことからもわかる．結局，ピサの斜塔から垂直落下させなくても，斜面の落下でも同じ結論になるわけである．ただし，斜面と物体の間に摩擦がなければであるが.

1-5 (落下速度と角度)

滑り切ったときの速度は,

$$v(t^*) = g\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2v}{g}} = \sqrt{2gh}$$

[g]講義で調べたように，空気抵抗のある落下運動では質量に依存する．

である．この速度は角度θには依存しない．つまり，**同じ高さ**hから落下させた物体は，地面に着地するときには**同じ速さ**になっていることがわかる．落下に要する時間t^*は角度θに依存しているにもかかわらずである．

これは(重力のする)仕事と運動エネルギーの関係から自明なことではある．別の表現では位置エネルギーを運動エネルギーへ変換しているので，高さが同じならば位置エネルギーは同じであり，変換された運動エネルギーは角度には依存しない．

1-6 (力積)

力積は，力の時間に関する積分量である．斜面を落下する間の力積Iは，

$$I_x = \int_0^{t^*} dtF_x = \int_0^{t^*} dtMg\sin\theta = Mg\sin\theta t^* = Mg\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2v}{g}} = M\sqrt{2gh}$$

である．

これもまた斜面の角度θには依存しない．前問の結果から，滑り切ったときの物体の運動量は$Mv(t^*) = M\sqrt{2gh}$であるので，この力積に等しい．初速が0であったことに注意すると，このことは，

> 斜面を落下する間に物体の受ける力積は物体の運動量変化$(Mv(t^*) - Mv(0))$に等しい

ことがわかる．このことは角度θに依存しなくて，高さhにだけ依存していることが重要である．この関係は運動方程式を積分することによって示すことができる一般的な法則である[h]．

1-7 (観測から力へ)

第一回目のレポートに質点で記述できる例を考えたときに,「記述できること」と「力の正体がわかること」は別であることを議論した．ここでは運動が実験的に観測できたときに，そこから力に関して何がわかるか考えてみようというわけである．問題文にあるように，結果は抵抗のない落下ではなくて，何かしらの抵抗力があることと，物体の質量を変えても落下時間が変化しないことがわかった．これらのことから，抵抗力(摩擦力)に関することを考えてみる．この運動を記述する運動方程式の右辺にはこの抵抗力の項が加えられる．しかし，落下時間が質量に依存しないということは方程式が質量に依存しないというわけである．つまり，この抵抗力も重力と同様に質量に比例することがわかる．

実際に，摩擦に関しては幾つかの経験則[i]があって，その一つとして，摩擦力の大きさ

[h] これは講義で示した．

[i] 我々の生活しているスケールでの摩擦力には，アモントン-クーロンの法則と呼ばれる経験則がある．

1. 摩擦力は見かけの接触面積に依存しない
2. 摩擦力は垂直抗力に比例する
3. 動いている物体の摩擦力は止まっているときの摩擦力よりも小さく，また動いている速度には依らない．

これら法則は多くの摩擦現象で成り立っているが，その理由についてはわからないことも多く，この法則が破れている場合もある．摩擦については，工学の応用面では大変重要あり，その起源も含めて現在でも研究されている．

は垂直抗力に比例する．垂直抗力は $Mg\cos\theta$ であり，まさに質量に比例している．

問題 2 「スカイダイビング問題」：

この問題では，うまく微分方程式の解を接続することが目的である．

2-1 (自由落下の問題)

t_0 までは，空気抵抗のない落下運動 (自由落下) である．飛び出す位置を原点にして，上向きに z 軸の正の方向をとると，時刻 t_0 での位置 $z(t)$ と速度 $v(t)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} z(t_0) &= -\frac{1}{2}gt_0^2 \qquad (4) \\ v(t_0) &= -gt_0 \qquad (5) \end{aligned}$$

である．

2-2 (抵抗係数の次元)

左辺の力の次元は，$[F]=MLT^{-2}$ である．速度の次元は LT^{-1} であるので，運動方程式の次元を書くと，

$$MLT^{-2}=[\kappa](LT^{-1}) \quad\Longrightarrow\quad [\kappa]=\frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}}=\frac{M}{T}$$

となる．

2-3 (運動方程式の解放)

講義では代数方程式の方法を使ったので，ここでは変数分離の方法で解いてみることにする．速度に関する運動方程式は，

$$m\dot{v}=-mg-\kappa v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v}=-g-\frac{\kappa}{m}v \quad\Longrightarrow\quad \frac{\dot{v}}{g+\frac{\kappa}{m}v}=-1$$

である．これは確かに変数分離の形になっている．積分すると，未定定数を C として，

$$\int dv\frac{1}{g+\frac{\kappa}{m}v}=\int dt(-1) \quad\Longrightarrow\quad \frac{m}{\kappa}\log\left(g+\frac{\kappa}{m}v\right)=-t+C$$

となる．v について解く前に，初期条件から定数 C を決める．その条件式 (式 (5)) は，

$$\frac{m}{\kappa}\log\left(g+\frac{\kappa}{m}(-gt_0)\right)=-t_0+C$$

となる．ここから C を求めて，上の式に代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{m}{\kappa}\left[\log\left(g+\frac{\kappa}{m}v\right)-\log\left(g+\frac{\kappa}{m}(-gt_0)\right)\right] &= t_0-t \\ \frac{g+\frac{\kappa}{m}v}{g-\frac{\kappa}{m}(gt_0)} &= \exp\left(\frac{\kappa}{m}(t_0-t)\right) \\ v(t) &= \frac{mg}{\kappa}\left[\left(1-\frac{\kappa t_0}{m}\right)\exp\left(\frac{\kappa}{m}(t_0-t)\right)-1\right] \qquad (6) \end{aligned}$$

となる．もう一度積分すると，

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{mg}{\kappa}\left[\frac{-m}{\kappa}\left(1-\frac{\kappa t_0}{m}\right)\exp\left(\frac{\kappa}{m}(t_0-t)\right)-t\right]+C' \\
z(t) &= \frac{mg}{\kappa}\left[\left(t_0-\frac{m}{\kappa}\right)\exp\left(\frac{\kappa}{m}(t_0-t)\right)-t\right]+C'
\end{aligned}
$$

初期条件 (式 (4)) より，

$$
-\frac{gt_0^2}{2}=\frac{mg}{\kappa}\left[\left(t_0-\frac{m}{\kappa}\right)1-t_0\right]+C'
$$

となり，C' を代入して，

$$
z(t)=\frac{mg}{\kappa}\left[\left(t_0-\frac{m}{\kappa}\right)\left(\exp\left(\frac{\kappa}{m}(t_0-t)\right)-1\right)+t_0-t\right]-\frac{gt_0^2}{2}
$$

もちろん，この結果は代数方程式の方法を使っても導出することは出来る．

2-4 (終端速度)

末端速度 (終端速度)$v(\infty)$ は，速度の表式 (6) で $t\to\infty$ の極限をとると，

$$
v(\infty)=-\frac{mg}{\kappa}
$$

が得られる．末端速度は，力のつりあいの式からも決まるので，t_0 や $v(t_0)$ などには全く依存しない．

2-5 (グラフを描く)

自由落下のときにちょうど終端速度に達する時刻 t_0^* は，$t_0^*=\frac{m}{\kappa}$ である．t_0 のときに終端速度に到達していない場合として，$t_0=t_0^*/2$，終端速度を越えている場合として，$t_0=2t_0^*$ のグラフを下に示す．

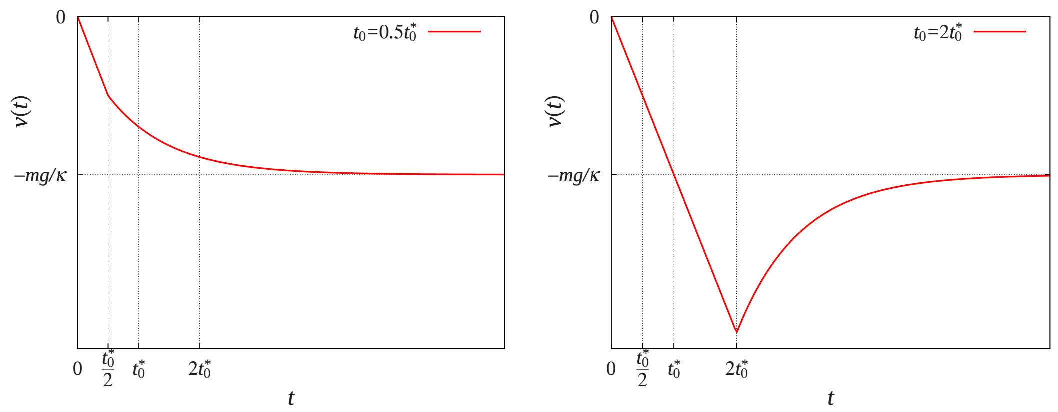

図 1: 速度の時間依存性：(左)$t_0=0.5t_0^*$ の場合．(右)$t_0=2t_0^*$ の場合．左は根性がなくて，さっさとパラシュートを開いてしまった場合で，右は勇気を持ってしばらく自由落下を堪能した場合に相当する?