

スピングラス状態のカオスについて

福島 孝治*

東京大学 物性研究所

<mailto:hokusima@issp.u-tokyo.ac.jp>

June 13, 2002

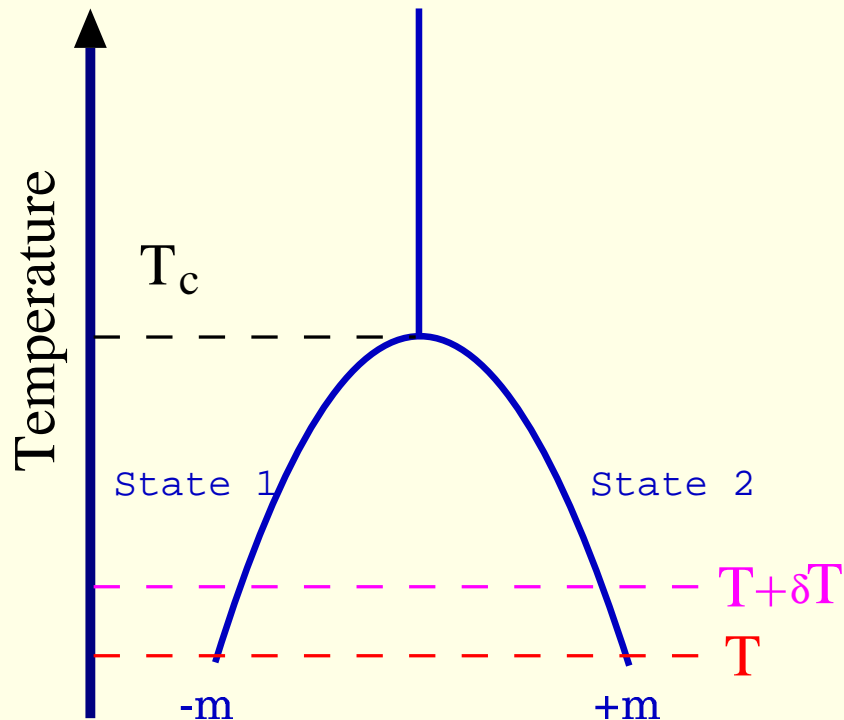
*共同研究：伊庭 幸人 氏 (統計数理研)

Today's Contents

- スピングラス状態のカオスについて
- これまでの研究
 - Against Temperature Chaos in Spin Glasses
 - Against “the against ...”
- 固有モード解析–別の視点として–
- まとめ

温度カオスとは...

- 簡単な場合： ferromagnetic model below T_c



- Overlap function between two valleys

$$q^{12} = q^{21} = -m^2(T)$$

$$q^{11} = q^{22} = +m^2(T)$$

- Overlap between an equilibrium state at T and $T + \delta T$

$$q = \pm m(T)m(T + \delta T),$$

varying smoothly with T

- Temperature Chaos

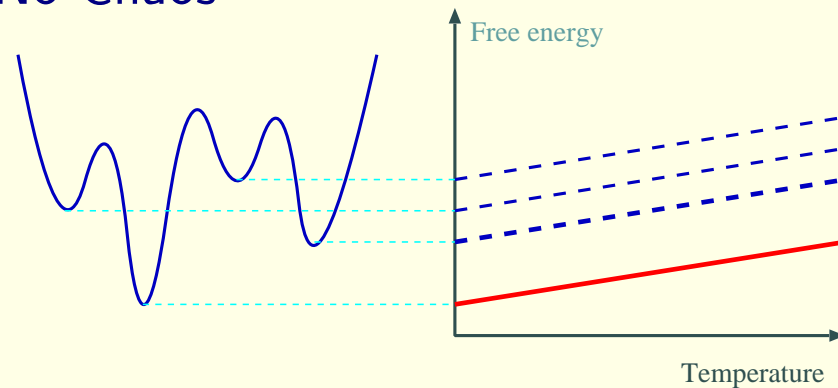
The equilibrium states at different temperatures is **TOTALLY DIFFERENT**.

\implies The overlap q is **ZERO**

Disordered Systems

- 同じ温度での重なり分布関数 $P(q) = \sum_{\alpha\beta} \delta(q - q^{\alpha\beta})$
 δ 関数が非自明か？ \rightarrow droplet picture, Mean-field picture and more...
- 異なる温度間での重なり関数の振舞 \Rightarrow **カオスの問題**

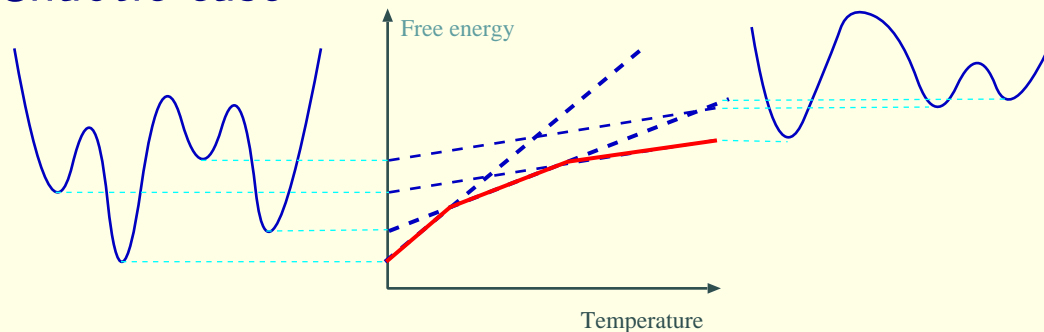
– No Chaos



NO LEVEL CROSSING

A state dominant in the partition function at T **ALSO** dominates it at $T + \delta T$.

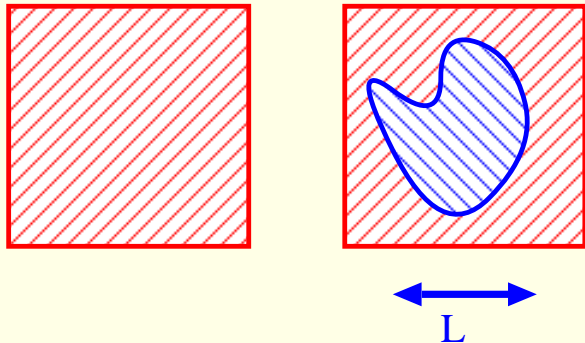
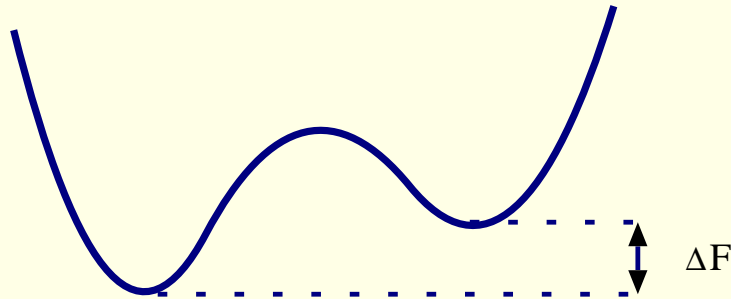
– Chaotic case



Temperature chaos as level crossings

“Chaotic Nature of the Spin-Glass Phase”

A. J. Bray and M. A. Moore: Phys. Rev. Lett. **58**, 57 (1987).



Free-energy difference at T

$$\Delta F(T) = \Delta E - T\Delta S \sim \Upsilon L^\theta$$

θ : stiffness exponent

Υ : T dependent stiffness constant

Change the temperature to $T + \delta T$

$$\begin{aligned} \Delta F(T + \delta T) &\simeq \Delta E - (T + \delta T)\Delta S \\ &\simeq \Upsilon L^\theta - \delta T\Delta S. \end{aligned}$$

Entropy difference of the droplet surface

$$\Delta S \sim \pm L^{d_s/2}: d_s: \text{fractal dimension}$$

If $d_s/2 > \theta$, $\Delta F(T + \delta T) \simeq \Upsilon L^\theta + \delta T L^{d_s/2}$ can **CHANGE** the sign.

\implies The equilibrium state should change on a length scale $L(\delta T) \sim \delta T^{-\frac{1}{d_s/2 - \theta}}$.

\implies Their typical overlap should go to **ZERO** as $q_{T, T+\delta T} \sim \left(\frac{L(\delta T)}{L}\right)^{d/2}$.

Chaos exponent ζ and Stiffness Exponent θ

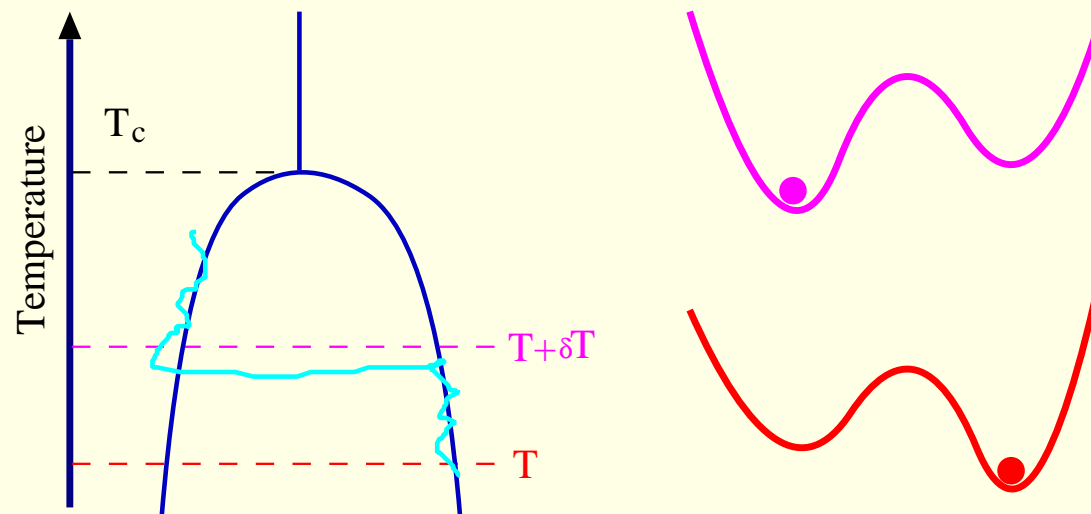
Chaos exponent: $\zeta = d_s/2 - \theta > 0 \implies$ CHAOS Lyapunov exponent

Stiffness exponent θ :

- mean-field picture (mean-field model): $\theta = 0$.
- short-ranged SG model in three dimensions: $\theta \simeq 0.2$.

$$d_s/2 \geq (d - 1)/2 \implies$$

The SG system most likely has **Temperature Chaos**.



Sensitivity of the Spin Glass order parameter

- 温度以外のカオスを考える

- Original Hamiltonian : $H_1[\sigma]$

- Perturbed Hamiltonian

$$H_2[\tau] = H_1[\tau] + P[\tau]$$

- a full Hamiltonian

$$H[\sigma, \tau] = H_1[\sigma] + H_2[\tau]$$

- いろいろな例

- 温度カオス :

$$P[\tau] = (\beta_2/\beta_1 - 1)H_1[\tau]$$

- 磁場カオス :

$$P[\tau] = p \sum_i \tau_i$$

- ボンドカオス :

$$P[\tau] = p \sum_{\langle ij \rangle} J'_{ij} \tau_i \tau_j$$

- 重なり関数

$$r(P) = \frac{\langle \sigma_i \tau_i \rangle_H^2}{\sqrt{\langle \sigma_i^a \sigma_i^b \rangle_{H_1}^2 \langle \tau_i^a \tau_i^b \rangle_{H_2}^2}}$$

- $P = 0, H_1 = H_2$

$$\rightarrow r(P = 0) = 1.$$

The spin-glass phase is

CHAOTIC,

if

$$\lim_{p \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} r(P) < 1.$$

Numerical Examinations

- 本来的には平衡スピングラス状態 $\{m_i\}$ の摂動前後での重なりを見たいところ
 - モンテカルロ法による 重なり関数 $q = \langle \sigma_i \tau_i \rangle$ 、あるいはその無次元量 r の評価.
 - 状態方程式の解。平均場模型の TAP eq. か、その簡単版 Naive TAP eq.

H-chaos : F. Ritort, PRB50,6844(1994)

J-chaos : M. NeyNifle, PRB57,492(1998)

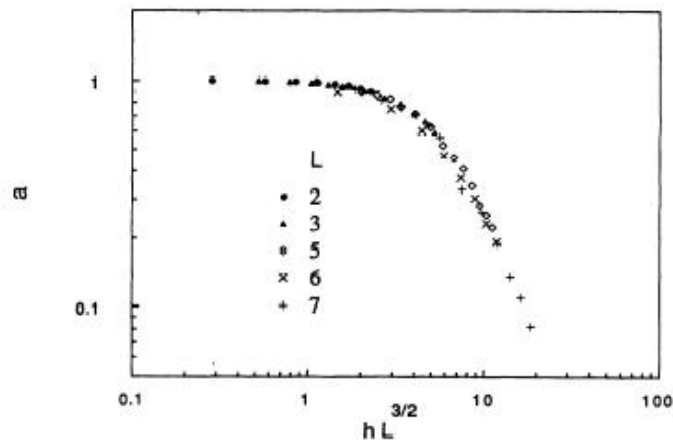


FIG. 5. Chaos with magnetic field in the $4d \perp J$ Ising spin glass at $T=1.5$. Magnetic field values range from $h=0.1$ up to $h=1$. The number of samples is approximately 100 for all lattice sizes. Typical error bars in this case are of the size of the symbols.

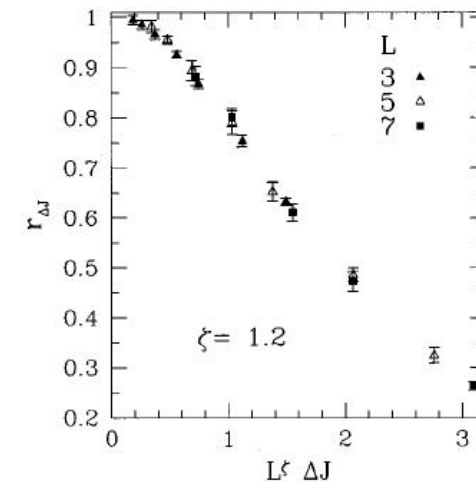


FIG. 6. A scaling plot of $r_{\Delta J}$ with random perturbation, case (1), at $T=1.4$ in the spin-glass phase. The perturbation lies in the range 0.05–0.4. The chaos exponent is $\zeta=1.2$.

磁場や相互作用の摂動に対して、スピングラス状態がchaoticになることはどうやらコンセンサスを得ているようである。が。。。

- ランダム媒質中の弾性体の問題では、本質的に摂動の種類にはよらないらしい。
Sales-Yoshino,cond-mat/0203371

Against Temperature Chaos...

- I. Kondor, J. Phys. A **22**, L163 (1989)
On chaos in spin glass
zero-th loop order → one loop : I. Kondor and A. Végso, J. Phys. A **26** L641 (1993).
- A. Billoire and E. Marinari, J. Phys. A **33**, L265 (2000),
*Evidences **Against** Temperature Chaos in Mean Field and Realistic Spin Glasses*
- T. Rizzo, J. Phys. A **34**, 5531 (2001),
***Against** Choas in Temperature in Mean-Field Spin Glass Models.*
- R. Mulet, A. Pagnani, and G. Parisi, Phys. Rev. B **63**, 184438 (2001),
***Against** temperature chaos in naive Thouless-Anderson-Palmer equations*
- A. Billoire and E. Marinari, cond-mat/0202473,
Overlap Among States at Different Temperatures in the SK Model.

Experiment: Memory and Chaos Effects in Spin Glasses

K. Jonason, et al : Phys. Rev. Lett. **81**, 3243 (1998).

- カオス効果

ある温度 T_1 で長く待ち、緩和が進んだことが低温で役に立っていないように見える。

異なる温度での秩序状態に相関が無ければ、あってもいいかも。 → 温度カオス？

- メモリー効果

昇温中に、先程の温度 T_1 で長く待ったことを覚えているように見える。

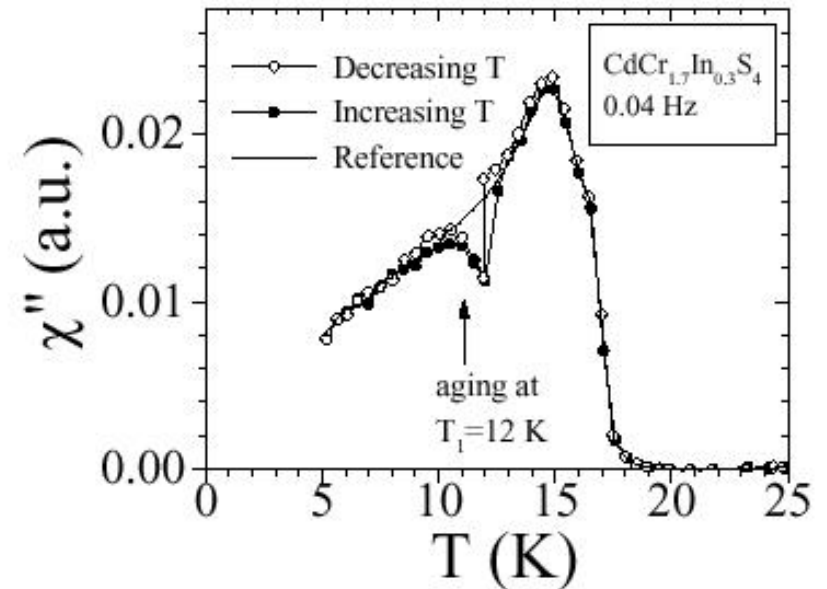


FIG. 1. Out-of-phase susceptibility χ'' of the $\text{CdCr}_{1.7}\text{In}_{0.3}\text{S}_4$ spin glass. The solid line is measured upon heating the sample at a constant rate of 0.1 K/min (reference curve). Open diamonds: the measurement is done during cooling at this same rate, except that the cooling procedure has been stopped at 12 K during 7 h to allow for aging. Cooling then resumes down to 5 K: χ'' is not influenced and goes back to the reference curve (chaos). Solid circles: after this cooling procedure, the data is taken while reheating at the previous constant rate, exhibiting memory of the aging stage at 12 K.

A complaint about the “against” study 1

Billoire–Marinari, J. Phys. A **33**, L265(2000).

平均場模型と3次元EA模型の計算

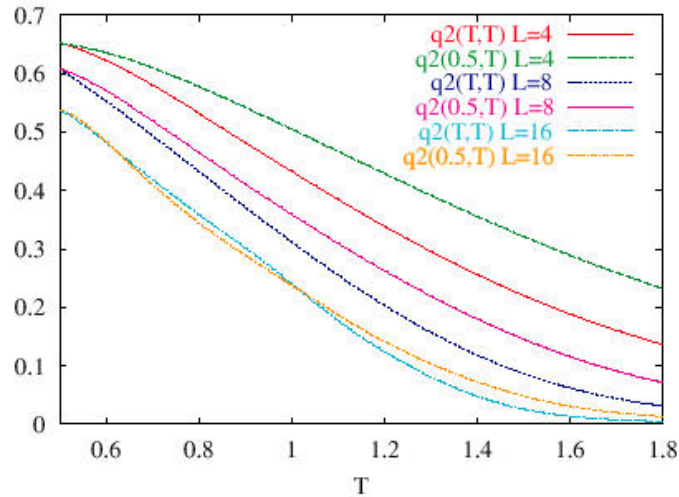


Figure 5. $q^{(2)}$ at equal and different T values for the 3D EA model.

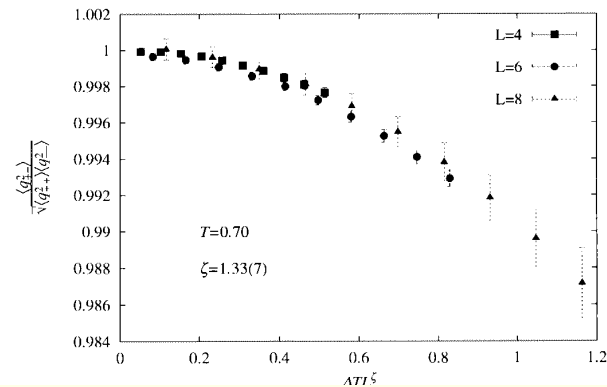
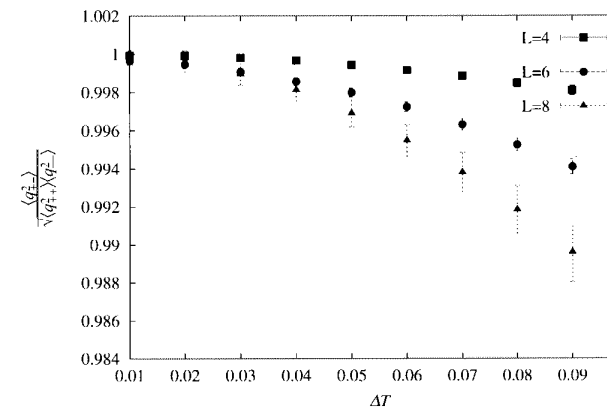
$$q^{(2)}(T, T + \delta T) \equiv \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_i \sigma_i(T) \tau_i(T + \delta T) \right)^2 \right\rangle$$

1. $q^{(2)}(0.5, T)$ と $q^{(2)}(T, T)$ の差がサイズと共に減少。
2. $q^{(2)}(0.5, T)$ が T とともに減少するのは、単に秩序変数の amplitude $q^{(2)}(T, T)$ が減っているからにすぎない。
3. これはカオスではない

K. Hukushima, unpublished.

そもそも、ちゃんと規格化した量じゃないとわからんじゃないのか。

$$r(\delta T) = \frac{q^{(2)}\left(T - \frac{\delta T}{2}, T + \frac{\delta T}{2}\right)}{\sqrt{q^{(2)}\left(T - \frac{\delta T}{2}, T - \frac{\delta T}{2}\right) q^{(2)}\left(T + \frac{\delta T}{2}, T + \frac{\delta T}{2}\right)}}$$



ほらね。

A complaint about the “against” study 2

Mulet–Pagnani–Parisi, Phys. Rev. B **63**, 184438 (2000).

naive TAP eq の解

$$m_i = \tanh \beta \left(\sum_j^N J_{ij} m_j + h_i - \beta \sum_j^N J_{ij}^2 (1 - m_j^2) m_i \right)$$

基底状態との重なり

$$q_J^{gs}(0, T) = \frac{1}{N} \sum_i^N m_i^\alpha(0) m_i^\alpha(T)$$

は、ZERO にならない。特に、サイズ効果が逆に出ている。 ⇒ **カオスなし!**

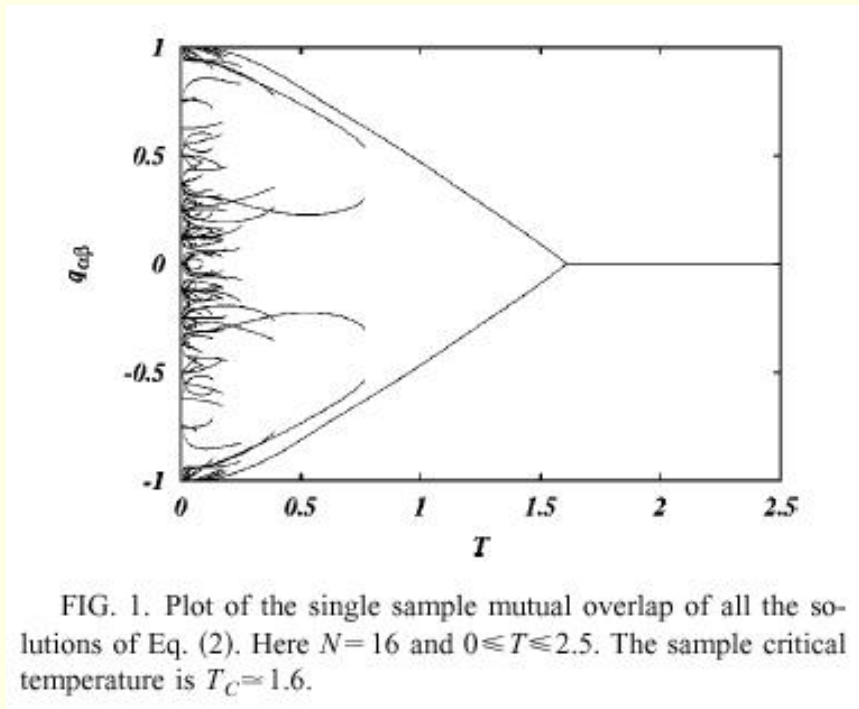


FIG. 1. Plot of the single sample mutual overlap of all the solutions of Eq. (2). Here $N=16$ and $0 \leq T \leq 2.5$. The sample critical temperature is $T_c \approx 1.6$.

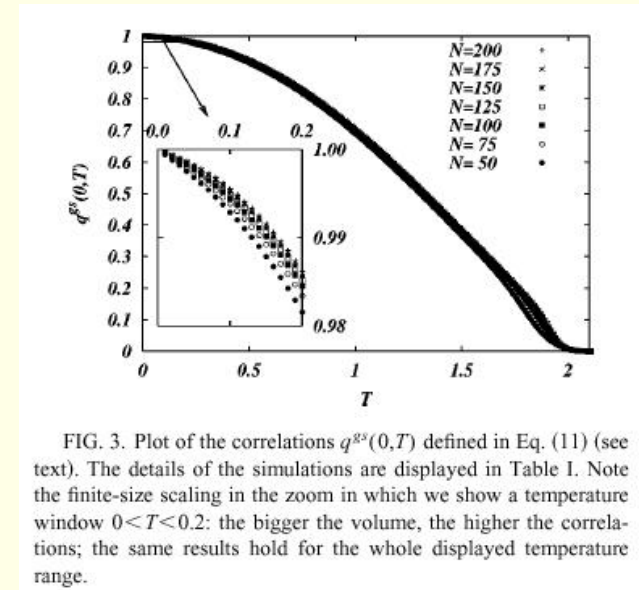


FIG. 3. Plot of the correlations $q^{gs}(0, T)$ defined in Eq. (11) (see text). The details of the simulations are displayed in Table I. Note the finite-size scaling in the zoom in which we show a temperature window $0 < T < 0.2$: the bigger the volume, the higher the correlations; the same results hold for the whole displayed temperature range.

$T/J = 0$ 近傍で、解の逆分岐が起きてるんですが。。。。

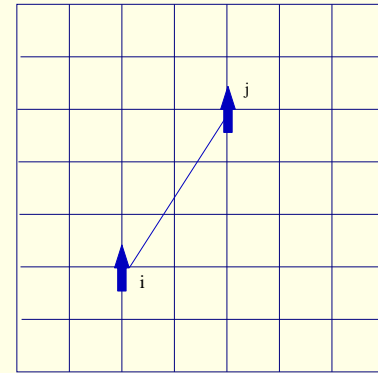
- 逆分岐は？
- level crossing の可能性は？

帯磁率行列の固有モード解析

帯磁率行列

$$\chi_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial h_i \partial h_j} F(\{h_i\}) \Big|_{h=0} = \frac{\partial}{\partial h_i} \langle S_j \rangle \Big|_{h=0} = \beta \langle S_i S_j \rangle$$

- 第一ステップとして、高温展開の最低次:
 $\chi_{ij} \rightarrow \beta^2 J_{ij}$ (疎行列)
- 一般には、スピン数 N として、 $N \times N$ の密行列
- 例えば、強磁性では、



$$\frac{\chi_{ij}}{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & m^2 & m^2 & m^2 & m^2 \\ m^2 & 1 & m^2 & m^2 & m^2 \\ m^2 & m^2 & 1 & m^2 & m^2 \\ m^2 & m^2 & m^2 & 1 & m^2 \\ m^2 & m^2 & m^2 & m^2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

長距離秩序形成：

$O(N)$ の固有値 (秩序の強さ)
 固有状態 (秩序パターン)

スピングラスの相での固有モードの振舞

- J. Sinova, G. Canright and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 2609.
- J. Sinova, G. Canright, H. E. Castillo and A. H. MacDonald,
Phys. Rev. B **85**, (2001) 104427.

秩序の形成は、相関行列の固有値スペクトルの中に $O(N)$ の大きさを持つ固有状態の出現を意味する。

平均場描像が正しい
多数の純状態が存在する \implies $O(N)$ の固有値が 2 つ以上なくてはならない。

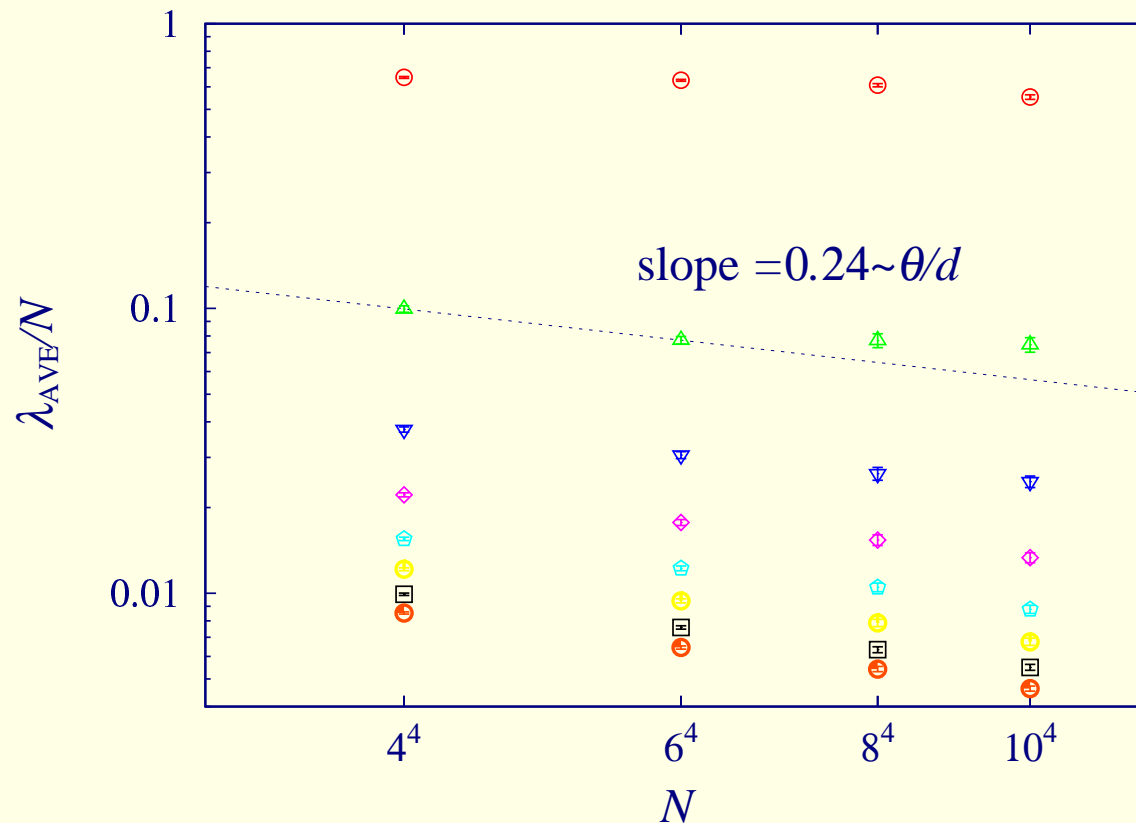
液滴描像が正しい
純状態は沢山はない \implies $O(N)$ の固有値は 1 つだけしか存在しない。

熱力学極限で生き残る主成分の数 \rightarrow どちらが正しいか判断ができる

スピングラス相での固有モード：第一固有値

$4d \pm J$ Ising EA Model using the dual trick method

System Size: $N \leq 10^4 = 10,000$ (800MB in conventional method)
 Temperature: $T/J = 1.0 \sim 0.5T_c$



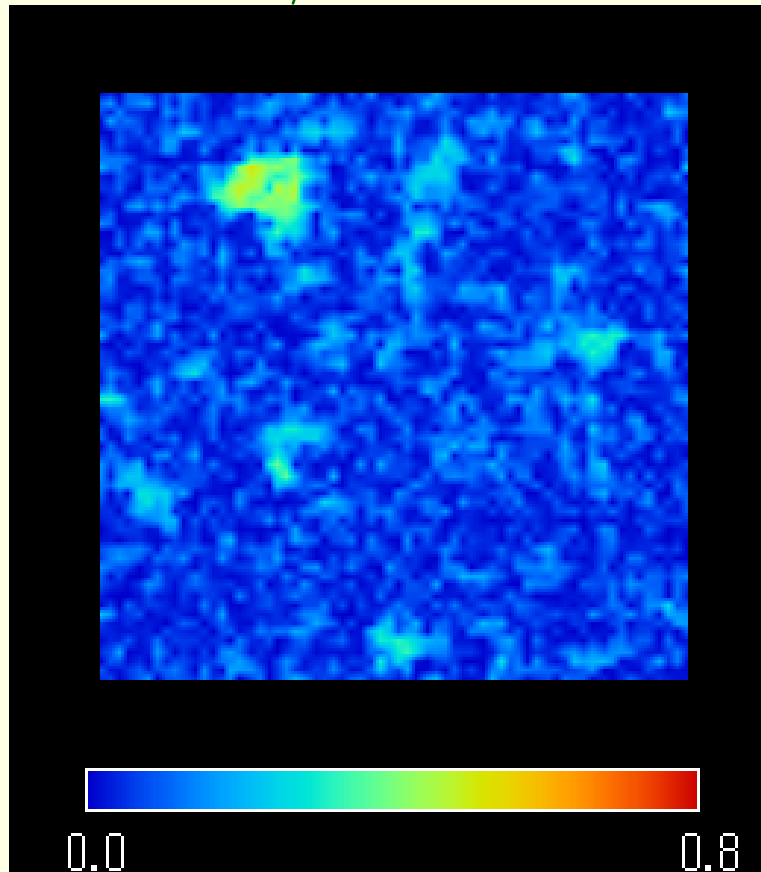
The second eigenvalue is found to be **extensive** for $N > 6^4$.

⇒ **Multiple Pure States.**

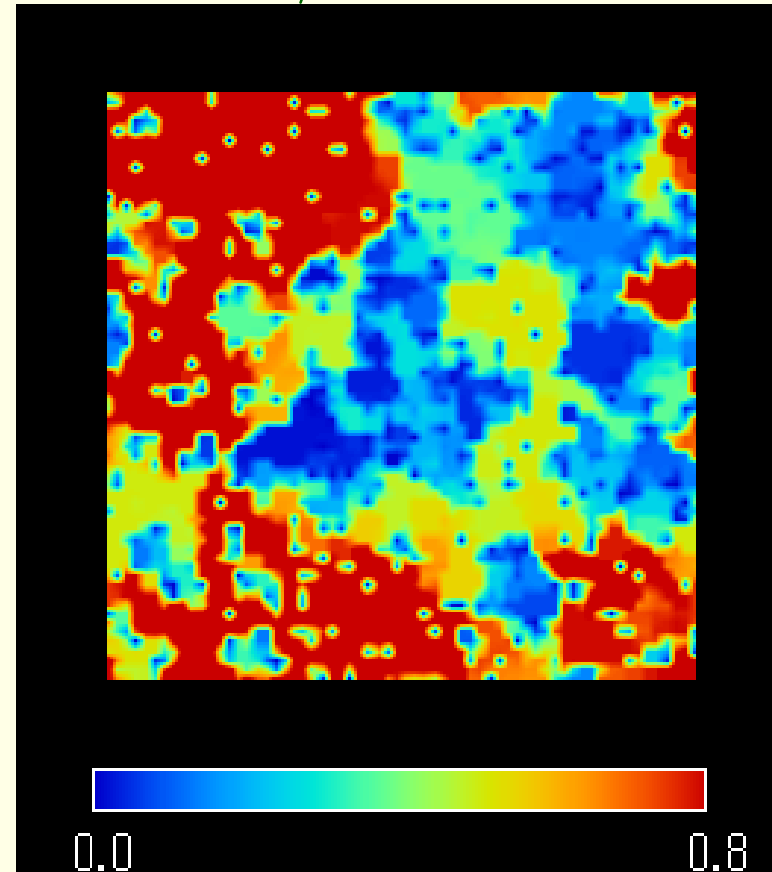
第一固有ベクトルの例：2次元スピングラス模型

The first eigenvector of a sample with $N = 64^2$

$$T/J = 1.8$$



$$T/J = 0.4$$

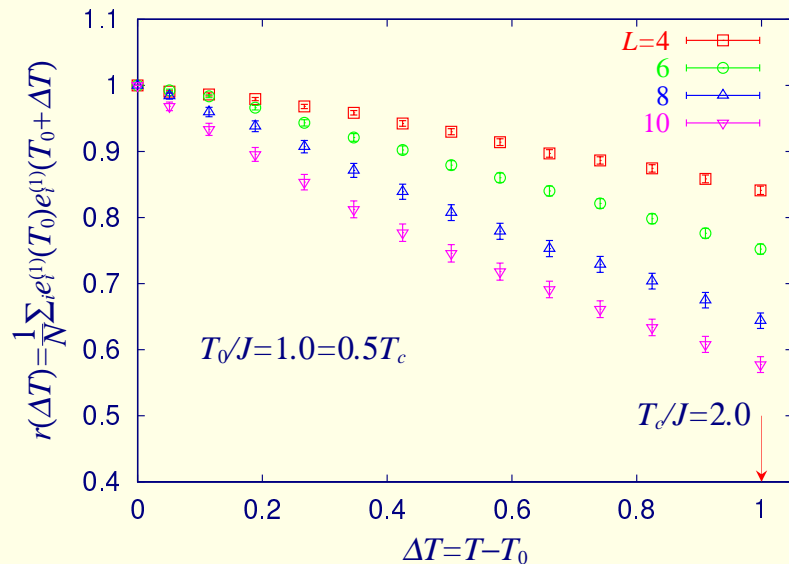


スピングラス相での固有モード：第一固有ベクトル

$4d \pm J$ Ising EA Model using the dual trick method

温度の異なる主成分の重なり

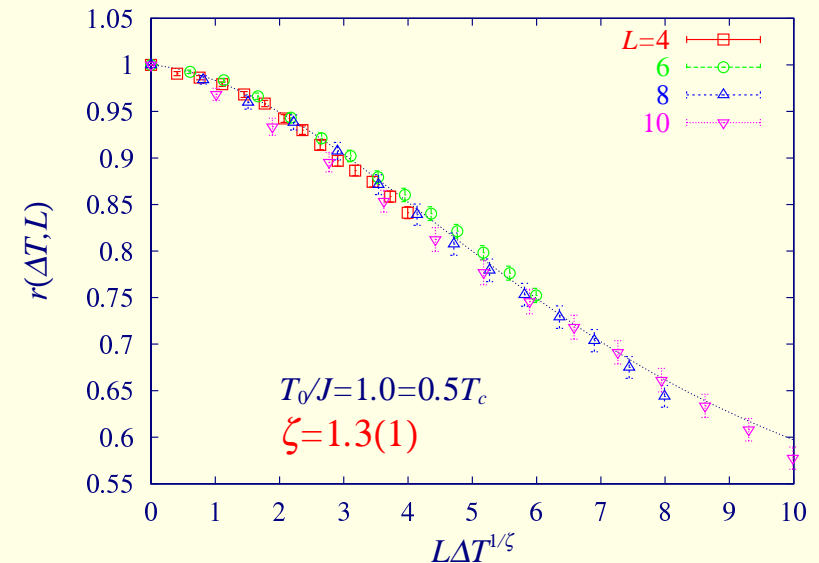
$$r_{T_0}(\Delta T) \equiv \left| \frac{1}{N} \sum_i e_i^{(T_0)} e_i^{(T_0 + \Delta T)} \right|$$



系のサイズを大きくすると、重なりは小さくなる

有限サイズスケーリング

$$r_{T_0}(\Delta T, L) = F(L/L_{\text{ovl}}) \text{ with } L_{\text{ovl}} = \Delta T^{1/\zeta}$$



熱力学極限 ($L \rightarrow \infty$) では、 $r(\Delta T) \rightarrow 0$



主成分 (秩序パターン) が温度と共に変化している

スピングラス相での固有モード：第二固有ベクトル

$4d \pm J$ Ising EA Model using the dual trick method

第二固有値も *Extensive* だとすると、その固有状態の重なりはどうか？

緑 第 1 固有状態の重なり.

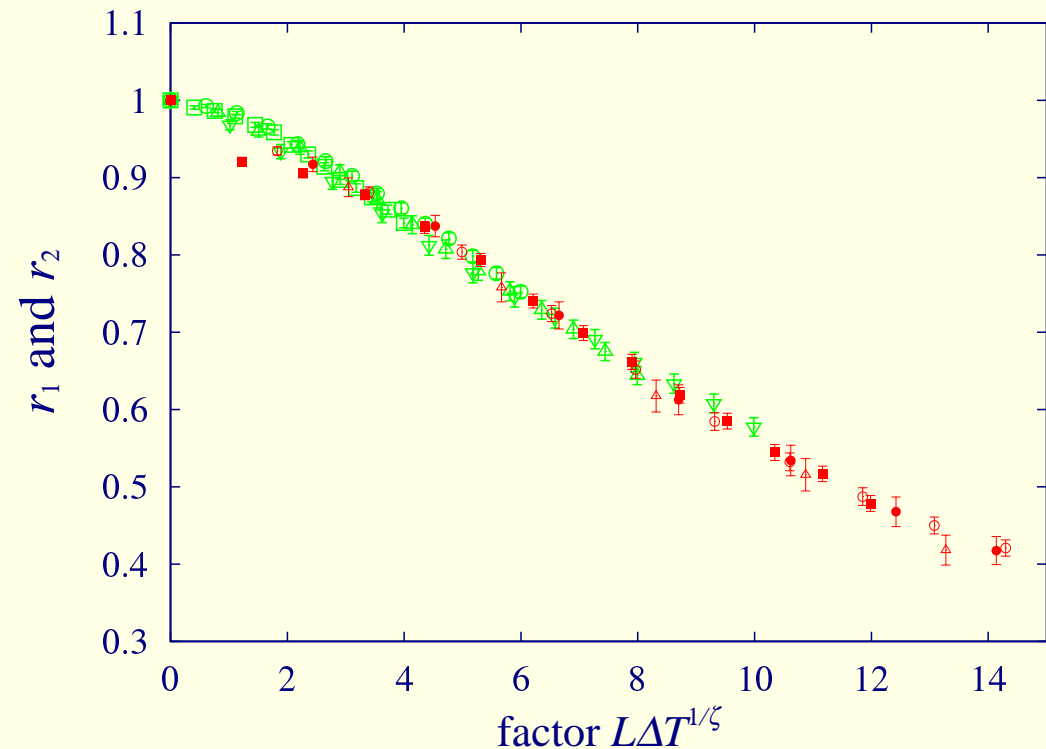
赤 第 2 固有状態の重なり.

但し、横軸のスケール因子は第一固有状態のものとは異なる.

- どうやら同じスケール関数で良さそう。
- しかも、 $\zeta \simeq 1.3$ は 4 次元スピングラス模型のボンド摂動の結果 (M. Ney-Nifle, PRB57, 492(1998)) と一致。

有限サイズスケールリング

$$r_{T_0}(\Delta T, L) = F(L/L_{\text{ovl}}) \text{ with } L_{\text{ovl}} = \Delta T^{1/\zeta}$$



スケーリング関数について

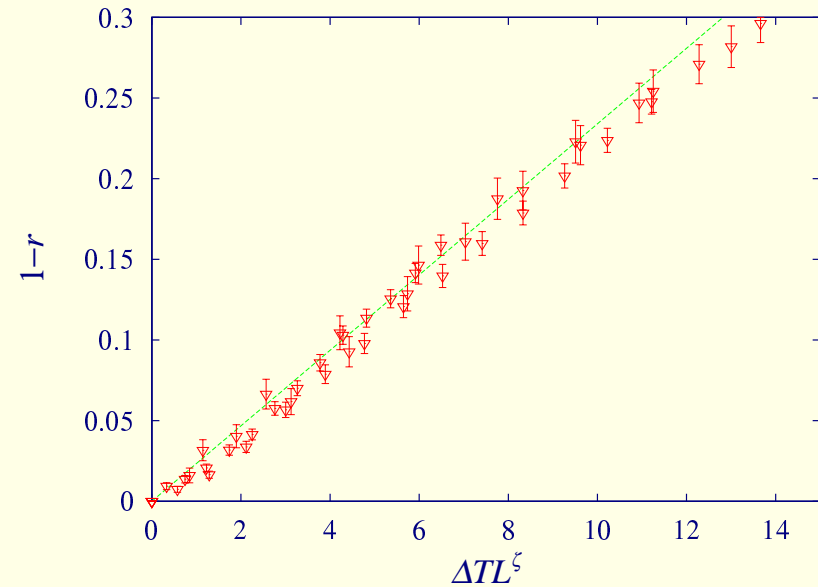
- 重なり関数 $r(\Delta T)$ は $\Delta T = 0$ の時に 1 なるが、そこからのズレ方を考える。
- Bray-Moore 流に考えると、大きさ L のドロップレット励起が Entropy gain で起きる確率は、

$$p \sim \frac{\Delta T L^{d_s/2}}{\Upsilon L^\theta} = (L/L_{ovl})^\zeta$$

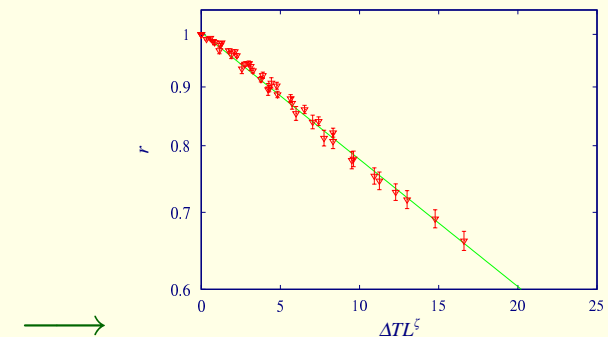
with $L_{ovl} = (\Upsilon/\Delta T)^{-1/\zeta}$

- 系の大きさと同程度の励起すると重なり関数 r は $O(1)$ ずれるから、

$$1 - r \propto p$$



少なくとも $(L/L_{ovl})^\zeta \sim L^\zeta \Delta T$ の小さいところでは、linear にみえる。OK
大きいところでは指数的か？



Summary

- スピングラス状態でのカオスについて議論した。特に、これまでの研究を Survey した。
- 固有モードの温度依存性という観点から、温度カオスの可能性を議論し、極めてそれを匂わす結果を得た。¹
 - 第一固有状態、第二固有状態共に、温度に依存し、その温度依存性は、有限サイズスケールリングできる。その結果、無限小の温度摂動に対して、固有状態は相関が切れることを示唆している。
 - スケールリングの指数 ζ は、他の摂動に対する指数と同じ。
 - スケールリング関数の形が、ドロップレット励起からの予想と合う。
- 固有モードは、秩序状態か？

¹cf. F. Krzakala and O.C. Martin, "Chaotic temperature dependence in a model of spin glasses, cond-mat/0203449.