スピングラス理論：

とっても乱れた系の中に現れる美しい構造について

スピングラス磁性

1. 希釈磁性合金 (CuMn, AuFe,...): 金属ホストにわずかに(数%)の磁性原子がある系
   - 磁性原子間の有効相互作用：RKKY相互作用

$$\mathcal{H} = -\sum J_{\text{eff}}(\boldsymbol{R}_{ij})\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j, \quad J_{\text{eff}}(\boldsymbol{R}) \propto \frac{\cos(2k_F R)}{(2k_F R)^3}.$$

   (a) 磁性原子は金属中にランダムに埋め込まれている.
   (b) 相互作用の符合が磁性原子間に依存して，正負になる

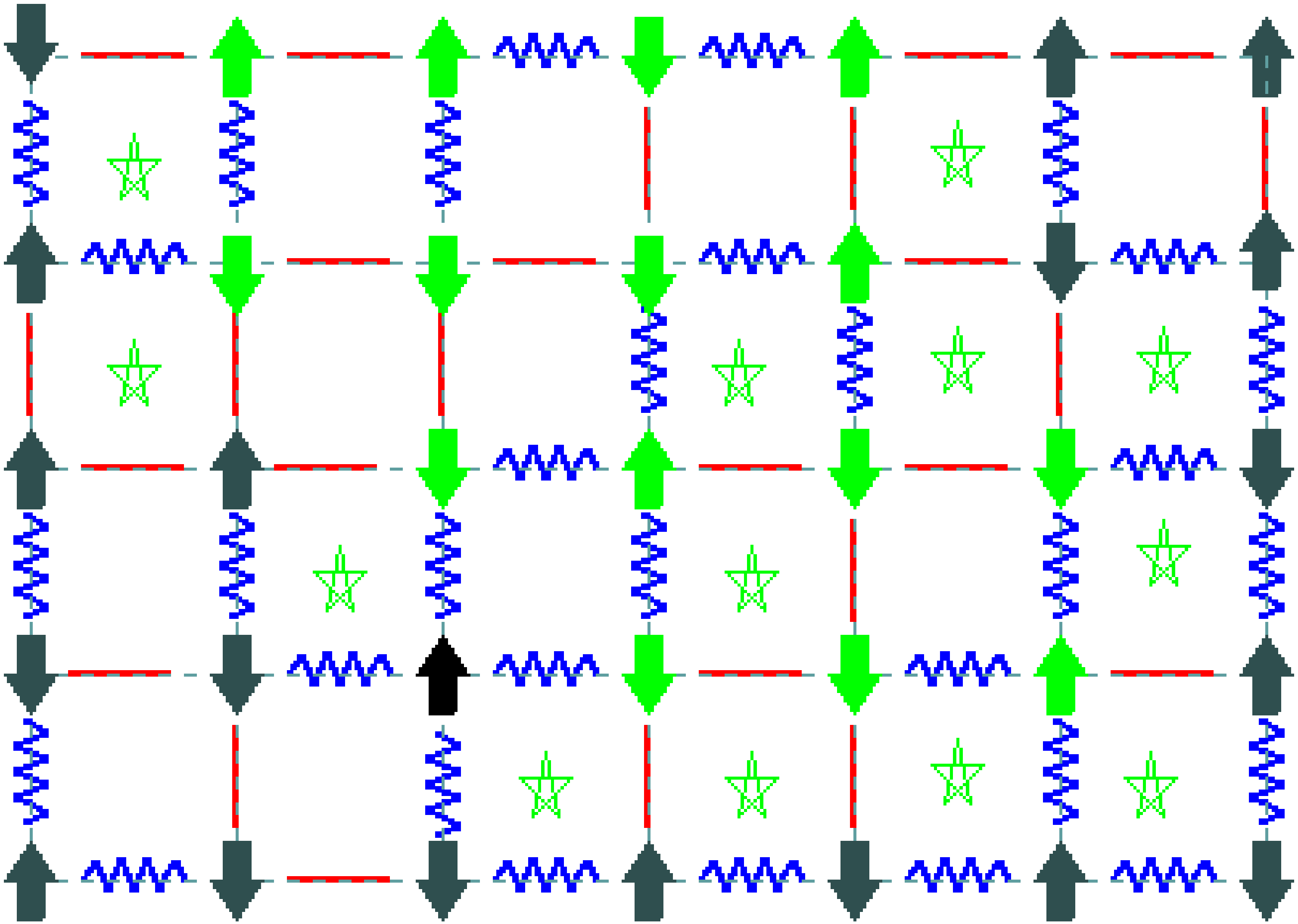
2. 置換型AB混晶 ($Fe_x Mn_{1-x} TiO_3$,...)：相互作用の異なる磁性原子が混ざる
   - $x \sim 0.5$ くらいになると，$x \sim 1(or0)$ 近傍での一様な秩序は崩壊して,...

3. アモルファル磁性(FeNiP,...): アモルファス原子の位置がランダムであり，価数によって磁性が異なる.

4. セラミック超伝導：秩序パラメータの位相がJosephson結合している系

5. 誘電体グラス

スピングラスのイメージ



スピングラスのイメージ

- 相互作用：
  1. **ランダムネス**： 並進対称性がない
  2. **フラストレーション**：低励起状態が多数になる．秩序の候補が沢山ある．

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{N}\sum_i e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_i}\langle \boldsymbol{S}_i\rangle = \mathbf{0}$$

どんな波数$\boldsymbol{q}$にも秩序は引っかからない．しかし，どうやらスピンは固まっているように見える(交流帯磁率がある温度で折れ曲がる)．

ランダムに好きな方向に凍結している... スピングラス相

- Edwards-Anderson 理論：秩序変数 $q_{\rm EA} = Q(t\to\infty)$

$$Q_{\rm EA}(t) \equiv \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_i \langle \boldsymbol{S}_i(t=0)\cdot \boldsymbol{S}_i(t)\rangle \longrightarrow \tfrac{1}{N}\langle \boldsymbol{S}_i\rangle^2 \neq 0$$

相の判別

常磁性相	$q_{\rm EA}=0$	$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})=0$
強磁性相	$q_{\rm EA}\neq 0$	$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\neq 0$
スピングラス相	$q_{\rm EA}\neq 0$	$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})=0$

スピングラスの平均場理論

- Sherrington-Kirkpatric model (Phys. Rev. Lett. 35, (1979) 1792.)
  - Edwards-Anderson modelの平均場版(無限大次元)

$$\mathcal{H}(\mathcal{S},\mathcal{J}) = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}S_iS_j - h\sum_i S_i, \quad P(J_{ij}) \propto \exp\left(-\frac{N(J_{ij}-J_0/N)^2}{2J^2}\right).$$

  * 相互作用 J_{ij} の分布：平均値 J_0/N, 分散 $J/\sqrt{N}$.
  * エネルギーの全てのキュムラントが $O(N)$ になるように定義
  * $J_0/J \gg 1$ がpure局限，$J_0/J \ll 1$ ランダムの極み

- レプリカ法(トリック)

$$-\beta F = \langle \ln Z_J\rangle_J = \left\langle \lim_{n\to 0}\frac{1}{n}(Z_J^n - 1)\right\rangle_J = \frac{d}{dn}\langle Z_J^n\rangle_J\Big|_{n=0}$$

  - n の自然数だと考えると，独立な n ヶのランダムスピン系 $\tilde{\mathcal{H}}$

$$Z_J^n = \left(\mathrm{Tr}_S e^{-\beta\mathcal{H}(S,J)}\right)^n = \mathrm{Tr}_{S^1}\mathrm{Tr}_{S^2}\cdots\mathrm{Tr}_{S^n}\exp\left(-\beta\sum_{\alpha=1}^{n}\mathcal{H}(S^\alpha,J)\right) = \mathrm{Tr}e^{-\beta\tilde{\mathcal{H}}}$$

スピングラスの平均場理論：レプリカ系

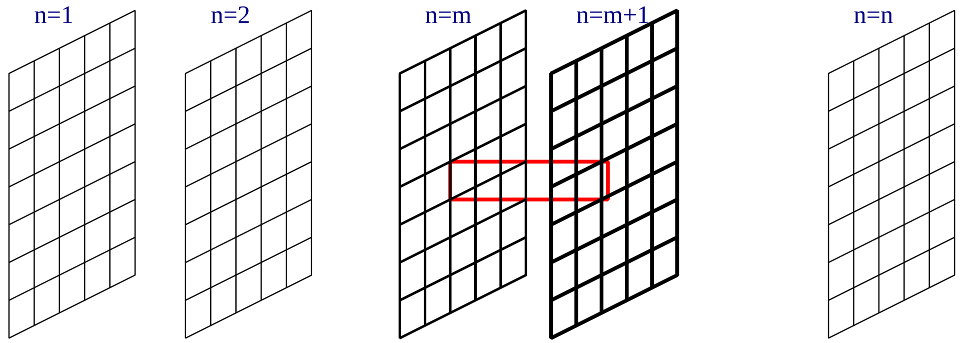
- 独立なnヶのランダムスピン系 から ランダム平均へ

$$Z_n \equiv \langle Z_J^n \rangle_J = \mathrm{Tr} \prod_{\langle ij \rangle} \left\langle e^{-\beta J_{ij} \sum_{\alpha=1}^{n} S_i^\alpha S_j^\alpha} \right\rangle_J e^{-\beta h \sum_{i,\alpha} S_i^\alpha} = \mathrm{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}_n}$$

- 相互作用するnヶの均一スピン系$\mathcal{H}_n$

$$-\beta\mathcal{H}_n = \frac{\beta^2 J^2}{2N} \sum_{\langle ij \rangle} \left(\sum_{\alpha} S_i^\alpha S_j^\alpha \right)^2 + \frac{\beta J_0}{N} \sum_{\langle ij \rangle} \left(\sum_{\alpha} S_i^\alpha S_j^\alpha \right) + \beta h \sum_{i,\alpha} S_i^\alpha$$

- $n \to 0$を一瞬忘れてしまうと…
  - 強磁性的に相互作用するnヶの系
  - レプリカ間に四体相互作用
    - * 縮退が多数ある



スピングラスの平均場理論：補助場の導入から鞍点評価

- n ヶの磁化に相当する場 m_α と $n(n-1)/2$ のスピングラス秩序に相当する場 $q_{\alpha\beta}$

$$Z_n \quad \propto \quad \mathrm{Tr} \int \prod_{\alpha\beta} Dq_{\alpha\beta} \prod_{\alpha} Dm_\alpha \exp\left[-\frac{N\beta^2 J^2}{2} \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}^2 - \frac{N\beta J_0}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha^2 \right.$$

$$\left. + \beta J^2 \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \left(\sum_i S_i^\alpha S_i^\beta \right) + \beta J_0 \sum_\alpha m_\alpha \sum_i S_i^\alpha + h \sum_{i,\alpha} S_i^\alpha \right]$$

- この積分を鞍点評価したい．鞍点条件から
  - $q_{\alpha\beta}$ について，$q_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{1}{N} \sum_i S_i^\alpha S_i^\beta \right\rangle_{\mathrm{eff}}$
  - m_α について，$m_\alpha = \langle \frac{1}{N} \sum_i S_i^\alpha \rangle_{\mathrm{eff}}$
    - $\langle \cdots \rangle_{\mathrm{eff}}$ は有効ハミルトニアン

$$H_{\mathrm{eff}} = \beta^2 J^2 \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} (S^\alpha S^\alpha) + \beta \sum_\alpha (J_0 m_\alpha + h) S^\alpha$$

での平均

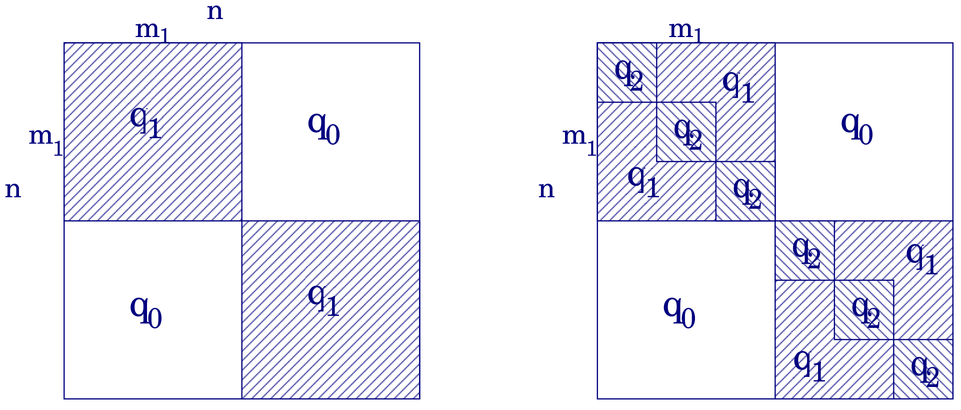
スピングラスの平均場理論：レプリカ対称解とその破れ

- レプリカ対称性の仮定：物理量は人工的に導入したレプリカの指標には依存しない.
  - 良かった点：スピングラス相転移描像のきっかけ
  - 悪かった点：物理的でない結果．負のエントロピー
    - レプリカ法に問題があるか...
- レプリカ対称性を仮定した鞍点が問題
  - その鞍点のまわりの安定性，Hessian 行列に負の固有値が出てくる.
  - レプリカ対称性を破る必要がある.
    - レプリカ対称性の破れ
      - 負のエントロピーや，鞍点の安定性の問題は解決された
      - 秩序変数が関数であること
      - 解空間が超計量的である，木構造がでてくる.
      - 秩序変数に関する量に自己平均性の破れ

スピングラスの平均場理論：レプリカ対称解の破り方

- 鞍点解($q_{\alpha\beta}$)におけるレプリカ依存性

1. レプリカ対称解 ： $q_{\alpha\beta} = q_0$ indep of the replica index.
2. 1step レプリカ対称性の破れ
3. 2step レプリカ対称性の破れ



4. 無限回(連続)レプリカ対称性の破れ

スピングラスの平均場理論：TAP 理論とその整合

- ランダムネスはできるだけ，そのままにして解析したい (順方向の解析).
  - サイト磁化 m_i についての状態方程式 ... これができるのは平均場模型の特殊性

$$m_i = \tanh \beta \left(h_i + \sum_j J_{ij} m_j - \beta m_i \sum_j J_{ij}(1 - m_j^2) \right)$$

  - $\{m_i\}$ についての非線型連立方程式：TAP 方程式
  - 解くのが難しいが，解ければスピンの固まり具合がわかるのはうれしい.
  - 解の個数の評価はできる... 低温で指数的な個数が出てくる.
  - レプリカ対称性の破れとの関連も議論されている.

    これはとても重要で，数値的に解いた TAP 方程式の解から計算できる物理量とレプリカ理論の予言との整合性をチェック〔部分的に) できた.

スピングラスの平均場理論からわかったこと

- スピングラス相転移
  - とてもランダムネスが強い状況で，従来の波数で分類されるタイプの秩序ではない新しい相の相転移がレプリカ理論により示された．
  - その相では，スピンはランダムな方向へ凍結する．
  - 特徴的なのは，転移温度での非線形帯磁率の負の発散を示すことで，これは実験(都グループ)により確かめられている．

- スピングラス相の性質
  - スピングラス相内では多数の準安定状態が存在する．
    - ∗ 自由エネルギー構造の一谷 vs 多谷相転移
    - ∗ レプリカ対称性の破れを伴う相転移
    - ∗ 準安定状態の超計量性，階層構造
    - ∗ 磁場中相転移の存在

平均場理論を越える試み

- 多数の(準)安定状態のある系の性質をより一般的にレプリカ法を通して見ることの有用性.
  - レプリカ対称性の破れには，大きく２種類(1 STEP と無限回の破れ）がある.
- これは勿論難しい課題：揺らぎの大きな低次元系への解析
  - くりこみ群の整備
  - ゲージ理論：Nishimori's ゲージ理論からの発展はあるか?
  - モンテカルロ法

ランダム系で触れていない問題

- ランダムネスが動的性質に及ぼす影響
  - Griffiths 相と呼ばれる異常超緩和を示す相
  - 量子スピン系における Griffith 相

おまけ (蛇足)

- 他の分野への発展： ランダムスピン系との理論構造の類似性から情報理論との接点が議論されている．田中さんの講義で触れられる．

  関連するプロジェクトも動いている．

  科研費特定領域研究「確率的情報処理への統計力学的アプローチ」
  (http://www.smapip.eei.metro-u.ac.jp/)

- モンテカルロ法の最近の進展

  SMAPIP チュートリアル「確率的アルゴリズムによる情報処理」

  （講演者 (敬称略)：福島孝治，渡辺治，喜多一）

  2003 年 11 月 10 日 (月)，ぱるる京都

  http://www.statp.is.tohoku.ac.jp/ kazu/SMAPIP/2003/tutorial/