

第 10 回講義でのチェック問題

2003 年 1 月 14 日、Ver. 1.1

直線電流の作る磁場をベクトルポテンシャル経由で求めてみる。

ベクトルポテンシャルの一般解は、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (1)$$

で与えられる。直線電流を  $z$  軸上にとることにすると、 $J_x, J_y$  は 0 となり、ただちに  $A_x = A_y = 0$  となることがわかる。求めるべき  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  の  $z$  成分は、電流の大きさを  $I$  として、

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (2)$$

であるが、この積分は次元を見てもすぐ予想できるように  $\log$  発散する。そこで、カットオフをつけて計算しておく。

最終的には  $\nabla \times \mathbf{A}$  より、磁場  $\mathbf{B}$  を知りたいのであって、そのようなカットオフは磁場には寄与しない(とうれしい)。カットオフを  $l^*$  として、

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l^*}^{l^*} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \\ &\downarrow \left( \text{不定積分 } \int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left( \sqrt{a^2 + x^2} + x \right) \text{ を使う} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[ \frac{\sqrt{r^2 + (z + l^*)^2} + (z + l^*)}{\sqrt{r^2 + (z - l^*)^2} + (z - l^*)} \right] \\ &\downarrow l^* \gg 1, z/l^* \text{ で展開すると} \\ &\downarrow \sqrt{r^2 + (z \pm l^*)^2} = l^* \sqrt{(1 \pm z/l^*)^2 + \frac{r^2}{l^{*2}}} \simeq l^* \pm z + \frac{r^2}{2l^*} \\ &\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[ 4 \frac{l^{*2}}{r^2} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ 2 \ln \frac{1}{r} + \ln(4l^{*2}) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

やはり、第二項は、 $l^* \rightarrow \infty$  で  $\log$  発散を与える。しかし、磁場の計算には寄与せずに、重要な項は、

$$A'_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r \quad (4)$$

であり、磁場は

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial y} A'_z, -\frac{\partial}{\partial x} A'_z, 0 \right) \\ &= \left( -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r^2}, -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{r^2}, 0 \right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{e}_r}{r}, \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_r = (x/r, y/r, 0)$  で動径方向の単位ベクトル。

以上

