福島孝治 (東大総合文化)
平成 15 年 1 月 23 日 Ver.1

- not so Frequently Asked Questions -

講義では平面に貼りついた閉曲面について Stokes の定理を示したが、一般にうねうねしている場合もいいのか?

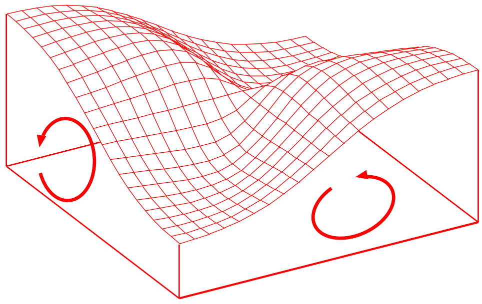
これは講義の中で質問であったが、そこでは一般化の針を述べるにとどまった。講義直後に明解な証明を学生さんが示してくれた。以下のとおりである。

講義でやったとおり、平坦な平面については証明できたとする。今、対象となるウネウネ平面を平坦な面で囲んでしまった閉曲面 S を考える (左図)。そこで、ベクトル場 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ に対するガウスの定理 (発散定理) は、

$$\int \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dV = \int \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dS \quad (1)$$

ところで、左辺はベクトル場の性質よりゼロになる ($\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$)。

一方で、右辺は、



上のウネウネ面についての Stokes の定理を示したい。こんな図でイメージつかめるだろうか?

$$\int \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dS = \int_{\text{ウネウネ}} + \int_{\text{平坦}} \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dS = 0 \tag{2}$$

となるので、次のようになる。

$$\int_{\text{ウネウネ}} \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dS = -\int_{\text{平坦}} \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dS \tag{3}$$

右辺には、(すでに示した)Stokes の定理を使って、それぞれウネウネ面を囲んでいる平坦面の回りの線積分の和に置き換えられる。

$$\begin{aligned} \int_{\text{ウネウネ}} \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})\, dS &= -\left(\int_{-C_1} + \int_{-C_2} + \cdots \right) \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\text{ウネウネ周回}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{4}$$

というわけで、ウネウネしていてもよいことがわかる。

ガウスの定理は、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}V = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}S \tag{5}$$

だが、ベクトル場$\boldsymbol{A}$として位置$\boldsymbol{x}$にある点電荷 q が作るクーロン場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{x}|} \tag{6}$$

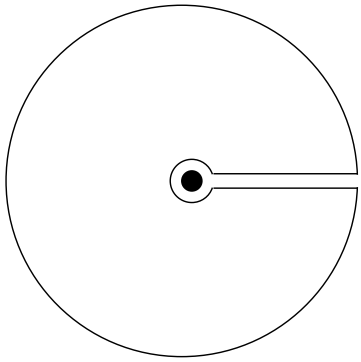
を考えると、左辺の体積積分は原点でできない。どうなる?

点電荷の位置 x を中心とする球から特異点である x の回りを取り除いた閉曲面を考える。その閉曲面 S で囲まれた体積 V 内には特異点は無いので、ガウスの定理を使うことができる。

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} dV = \int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} dS \tag{7}$$

左辺は体積 V のどこでもゼロになる[1]。また、右辺の表面積分の内、外球と内球をつなぐ表面は、内球が非常に小さいとすると球の法線方向に平行であり、$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ となる。まとめると、

$$0 = \int_{S_{外}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} dS - \int_{S_{外}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} dS' \tag{8}$$



球の中心をくりぬいた閉曲面のつもり。あんまり３次元球に見えないが。。。

であり、

$$\int_{S_{外}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} dS = \int_{S_{外}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} dS' = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{9}$$

となる。最後の等式は、実は立体角を用いて計算できる。球についての電束が中の電荷に等しくなっており、これはガウスの法則である。

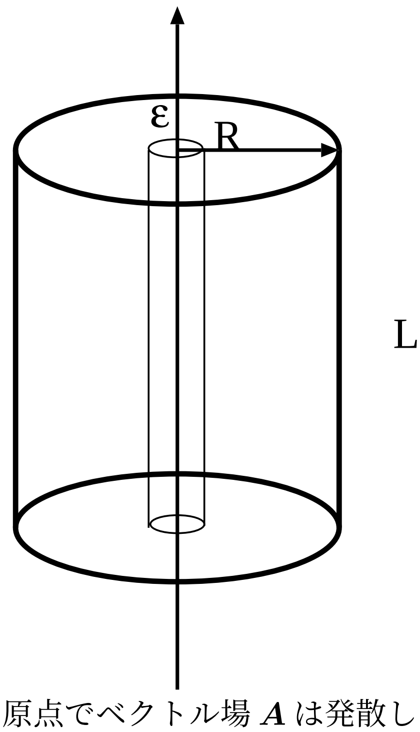
上に関係するが、次のようなベクトル場

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{x \log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{y \log(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, 0 \right) \tag{10}$$

の場合、閉曲面として半径 R の高さ L の円柱を考える。
右辺は法線ベクトル $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ なので、

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS &= \int_S \frac{(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} dS \\ &= L \left(2\pi R \frac{\log(R^2)}{(R^2)^{1/2}} \right) = 4\pi L \log R \end{aligned}$$

となる。



　しかし、その閉曲面での体積積分をやろうとすると、原点でベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は発散しているように見える。

$\infty =$ 有限???

と困惑してしまうが、そもそも原点のように発散のあるところでこのような定理が使えると考えるのが間違っている。原点を含むような半径 ϵ の細い円柱 (右図) をくりぬいて

[1] これは一度はチェックしておこう。

みるとどうなるかを考えてみる。右辺については、式 (11) と同様項が出てくる (R を ϵ で置き換えて、法線方向が逆なので符号が変わる)。

$$\int_{S'} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = 4\pi L \log(R/\epsilon) \tag{11}$$

一方で、ベクトル場の発散は、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y = \cdots = \frac{2}{x^2 + y^2} \tag{12}$$

なので、左辺は、

$$\int_{V'} \nabla \cdot \boldsymbol{A} dV = L \int_{\epsilon}^{R} dr (2\pi r) \frac{2}{r^2} = 4\pi L \log \left(\frac{R}{\epsilon} \right) \tag{13}$$

となり、右辺に一致する。証明した定理なんだから、成り立って当り前なんだけどね。いずれにせよ、発散する点がある場合は注意が必要だという話し。

ページが余ったので依然に一部配ったまとめを再びくっつけます。

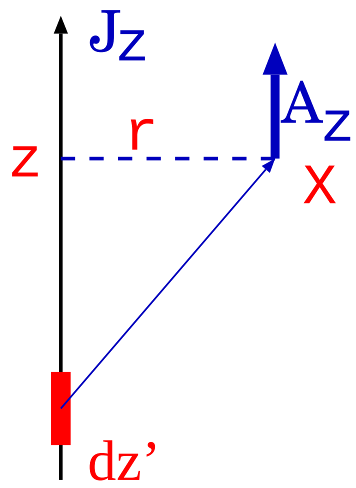
第 10 回講義でのチェック問題

2003 年 1 月 10 日、Ver. 1.0

直線電流の作る磁場をベクトルポテンシャル経由で求めてみる。

ベクトルポテンシャルの一般解は、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{14}$$



で与えられる。直線電流を z 軸上にとることにすると、J_x,J_y は 0 となり、ただちに $A_x = A_y = 0$ となることがわかる。求めるべき $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の z 成分は、電流の大きさを I として、

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \tag{15}$$

であるが、この積分は次元を見てもすぐ予想できるように log 発散する。そこで、カットオフをつけて計算しておく。

最終的には $\nabla\times\boldsymbol{A}$ より、磁場 $\boldsymbol{B}$ を知りたいのであって、そのようなカットオフは磁場には寄与しない (とうれしい)。カットオフを l^* として、

$$\begin{aligned}
A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l^*}^{l^*} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \\
&\downarrow \left(\text{不定積分}\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(\sqrt{(a^2+x^2)}+x\right)\text{を使う}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\sqrt{r^2+(z+l^*)^2}+(z+l^*)}{\sqrt{r^2+(z-l^*)^2}+(z-l^*)}\right] \\
&\downarrow \ l^* \gg 1, z/l^*\text{で展開すると} \\
&\downarrow \ \sqrt{r^2+(z\pm l^*)^2} = l^*\sqrt{(1\pm z/l^*)^2} + \frac{r^2}{l^*} \simeq l^* \pm z + \frac{r^2}{2l^*} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[4\frac{l^*}{r^2}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[2\ln\frac{1}{r} + \ln(4l^{*2})\right]
\end{aligned} \tag{16}$$

やはり、第二項は、$l^* \to \infty$ で log 発散を与える。しかし、磁場の計算には寄与せずに、重要な項は、

$$A'_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r \tag{17}$$

であり、磁場は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z, -\frac{\partial}{\partial x}A_z, 0\right) \\
&= \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{r^2}, -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{r^2}, 0\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{e}_r}{r}
\end{aligned} \tag{18}$$

以上