第一回レポートの感想と解答例

2003 年 1 月 20 日、Ver. 1.0

問題 1. 2 つの点電荷 q と $4q$ が距離 a だけ離れた点に固定されている.

1. 電場がゼロになる点はどこか示せ
2. その点に新たに点電荷 q' を持ってくるとどうなる?
3. また、そこから少しずらすとどうなるか?

これは、電荷とクーロンの法則を理解していればできる問題である。なんと、今年のセンター試験の物理 B にほぼ同様な問題が出ていた。みなさんはできたよね。

(1) クーロン力は中心力なので、2 つの点電荷を結ぶ線以外に力、すなわち電場のつり合う点はない。そこでその直線を x 軸にとり、その直線上だけで議論をする。点電荷 q の位置を原点に、点電荷 $4q$ の位置を a とする。位置 x での電場は、

$$E_x(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{x^2}\frac{x}{|x|} + \frac{4}{(x-a)^2}\frac{x-a}{|x-a|}\right) \tag{1}$$

これがゼロになるのは、$0 \le x \le a$ だけである。この条件で、$E_x = 0$ になるような x を探す。それは、

$$\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(x-a)^2} = 0 \tag{2}$$

を解けばよくて、$x = \frac{2a}{3}$ である ($x = -a$ は範囲外)。

(2) 電場はゼロなので、当然点電荷 q' には力は働かずに動かない。

(3) さて、そこからずらしてみるのだが、大きく 4 つの場合に分けて考える。

1. 正電荷 $q' > 0$ で、x 軸から離す方向にずらしてみる

   x 軸からずらすと y、z 方向には斥力が働くので、そのまま飛んで行ってしまう (無限遠まで)。

2. 正電荷 $q' > 0$ で、x 軸方向に δx ずらしてみる

   上の議論から、例えば y 方向には不安定なので、点電荷 q' は x 軸上からは離れないと仮定する。さて、点電荷 q' は他の二つの点電荷から斥力を受けているので、(1) で求めた平衡点 $2a/3$ の方向に力が働く。典型例は以下の 2 つであった。

   (a) 平衡点の回りで単振動する。

   ずらしが非常に小さい時にはそうなるが、そのときは、フックの法則のように $F_x = -k\delta x$ になることを示す必要があるだろう。実際にこの比例定数を求めた学生もいた。

   (b) 平衡点の方向に動き、そこで止まる。

   止まるためには摩擦力が必要。

(c) 振動する

一般に一次元の運動なので振動し、その周期はエネルギー保存から示すことができる。ある位置 x での位置エネルギーは、

$$V(x) = q'\phi(x) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x-a|}\right) \tag{3}$$

であり、位置 x_0 で静止させたときに点電荷 q' のエネルギは $E^* = V(x_0)$ となる。$E^* = V(x)$ を満たすもう１つの解を x_1 とする。点電荷 q' は x_0 と x_1 の間を振動する。そのときのエネルギー $E(x)$ は、

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E^* \tag{4}$$

と保存される。ここで、m は点電荷の質量。これを解くと、

$$\frac{d}{dt}x = \sqrt{\frac{2}{m}(E^* - V(x))} \tag{5}$$

であるので、時間積分すると、

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E^* - V(x)}} + const \tag{6}$$

周期 $T(E^*)$ は

$$T(E^*) = \sqrt{2m}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{E^* - V(x)}} \tag{7}$$

となる。だが、この積分はできなかった。。。。。

3. 負電荷 $q<0$ で、x 軸方向にずらしてみる

   この場合は、2 つの点電荷から引力を受けるので、ずらした方の点電荷に引き寄せられる。

4. 負電荷 $q<0$ で、x 軸から離れる方向にずらしてみる

   ここでは、正電荷のように x 軸に対して振動するという答えが多かった。しかし、簡単ために x 軸に垂直の面上に動かすと、y, z 方向の力は x 軸に吸い寄せる方向だが、x 方向の力のつり合いはないので、x 軸直上に戻って来たときに平衡点には戻らない。結果として、点電荷のどちらか近い方に吸い寄せられる。x 方向の力がつり合う面上にずらしたとしても、その面からはみでる方向に不安定なので、結果は同じ。つまり、この場合は振動はせずに点電荷 q か $4q$ に吸い寄せられる。ではないか?

問題 2. 一様に電荷分布する平面板の作る電場を求めよ.

ここでの課題は、クーロンの法則から電荷分布についての積分を行って、電場を計算してみることである。ガウスの法則を用いるとあっという間に分かってしまうわけだが、講義でもやったように積分して求めてみるのも一度はやってみた方がよいだろう。その理由は講義で説明したとおりだが、まとめておくと、ガウスの法則から求められる場合は比較的対称性の高い場合であり、一般の場合は難しい場合がある。一方で、積分する方法は非常に一般的であり、手で計算できなければ、計算機にやらせることもできるだろう。ここでは積分すれば求まるのだということを体感して欲しかった[1]。

解答例 1

平面の一様電荷分布を σ として、ある観測位置$\boldsymbol{x}$での電場$\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_S dS' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|} \tag{8}$$

となる。ここで、積分は平面について行うわけだが、幾つかのやり方がある。ほとんどの教科書にのっている、おそらくもっとも簡単にできるのは円環分割であろう。観測点から電荷平面に垂直に下ろした点を原点として、半径 r の円環から来る電場を考える (図 1 左)。対称性から、平面に水平成分はない。円環上のある部分からの水平方向の電場は、円環のちょうど反対側から反対方向の電場が同じ大きさであるから、キャンセルする。結果として、垂直成分 (z 方向とする) のみ考えればよい。円環上の電荷は、$2\pi r\sigma$ であり、電場の大きさは、

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty dr 2\pi r\sigma \frac{1}{z^2+r^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}} \\ &\downarrow \quad \int dr \frac{1}{(z^2+r^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(z^2+r^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[-(z^2+r^2)^{-1/2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。答えは、

$$\boldsymbol{E} = \left(0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}|} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e}_z \tag{10}$$

$\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトル。

解答例 2

講義では無限に長い直線電荷の作る電場を計算した。その結果を利用してもできるとヒントとした。つまり、平面を無限に長い直線の集まりだと考える (図 1 右)。しかし、

[1]何事もそうだが、一度自分でやってみると、自分の理解に穴があることが自覚できることがある。その意味で「計算」は大事。しかし、計算できたこと**だけ**に興味を覚えてしまって、本質を見失うのは困るし、計算の詳細の困難点にとらわれてしまって、例えば計算できない (積分できない) ことですべてが理解できていないと思い込んでしまうのも困る。もう 1 つ困るのは、計算できなくても、本質は理解できていると誤解している場合である。

これはあまりよいヒントではなかった。やるべき積分がちょっと難しかった。以下にみてみよう。

線密度 ρ としてときに、直線電荷の作る電場は、その動径方向だけで、直線との距離 r でけで表せる：

$$E_r^{\text{直線}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{11}$$

線密度と面密度の関係は、$\rho = \sigma dx$ である。

$$\begin{aligned}
E_z(\boldsymbol{x}) &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2+z^2)^{1/2}}\cos\theta \\
&\downarrow \quad \cos\theta = \frac{z}{(x^2+z^2)^{1/2}} \\
&= \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+z^2} \qquad (12)
\end{aligned}$$

この積分をどうしようか。複素積分の知識を使うと、$x = iz$ の極の留数を拾えばよい。[2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+z^2} = 2\pi i \lim_{x\to iz}(x-iz)\frac{1}{x^2+z^2} = 2\pi i \lim_{x\to iz}\frac{1}{x+iz} = \frac{\pi}{|z|} \tag{13}$$

これで $E_z = \frac{\sigma}{2\pi}$ が得られる。

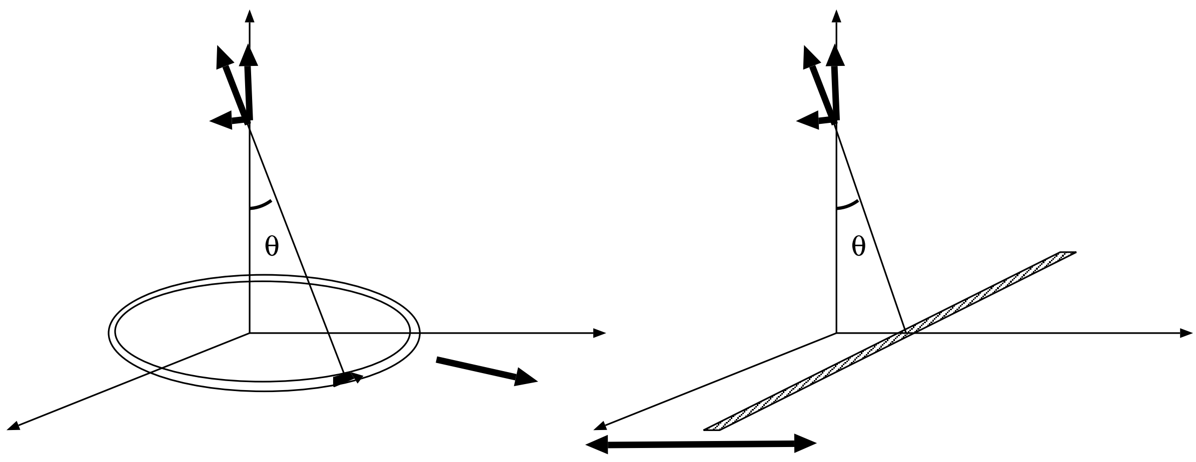

図 1: 平面を分割する方法

[2] あるいは、arctan で書くか?