第二回レポートの感想と解答例

福島孝治 (東大総合文化)

平成 15 年 1 月 10 日 Ver.1

問題 1. 無限に広がった平面に一様に分布する電荷の作る電場を求めよ。但し、立体角を用いよ。

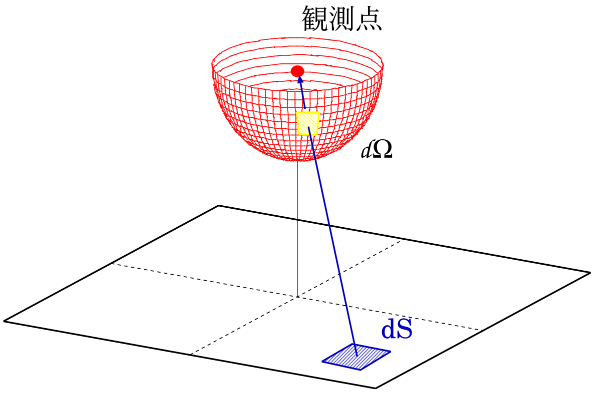
ここでの課題は立体角の概念を良く理解することである。立体角とは単位球上での見込む角度のことである。この考え方はたびたび (今回や講義で示した例) のように便利なことがある。

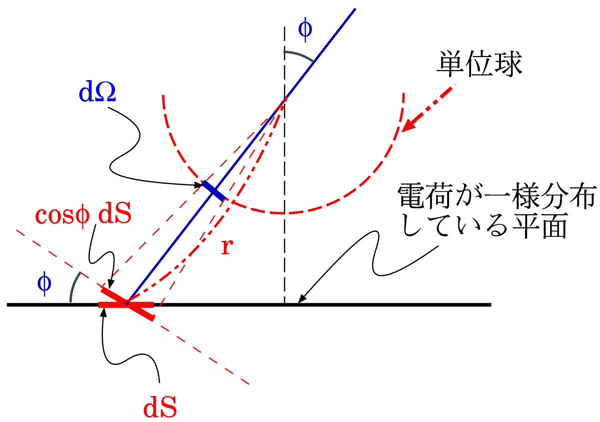
さて、解答例。

対称性から電場の平面に水平成分はキャンセルするので、垂直成分 E_z のみを考える。観測点から距離 r にある平面上の面積要素 dS が作る電場 dE_z は、

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\cos\phi}{r^2}dS \qquad (1)$$

ここで、σ は電荷の面密度で、ϕ は観測点からの面積要素の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と平面となす角度である。面積要素 dS からの寄与を観測点から見たときに、平面全体の積分を単位球上の積分に置き換えてみる (右の図のように)。





面積要素が観測点に対して張る立体角 $d\Omega$ は、観測点を中心とする単位球上の面積要素 dS を見込む表面積である。また、面積要素 dS を通る観測点を中心とする球上への dS の射影 dS' は、$dS' = \cos\phi dS$ と表される。面積要素 dS と立体角の関係は、

$$1 : r^2 = d\Omega : \cos\phi dS$$

であることから、

$$dS = \frac{r^2}{\cos\phi}d\Omega \qquad (2)$$

となる。

平面全体の寄与は、

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{平面全体}}\frac{\cos\phi}{r^2}dS \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{単位半球}}d\Omega \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}2\pi 1^2 = \frac{\sigma}{2\epsilon} \tag{3}$$

コメント：ベクトルの割算が出てくる解答例が多数あったが、それは難しいね。その経過は、次のようだ。立体角 $d\Omega$ と面積要素 dS の関係式 2 から、さらに続く。面積要素の法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$とすると $r\cos\phi = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ の関係があるので、

$$dS = \frac{r^3}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}d\Omega \tag{4}$$

となる。一方で、平面からくる電場の積分は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon}\int dS\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon}\int d\Omega\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}\end{aligned}$$

となるが、ここで、$\boldsymbol{r}$の**約分**はできませんよー。上のようにはじめから法線成分だけを計算するか、ここで成分にわけて考察を続ければよい。

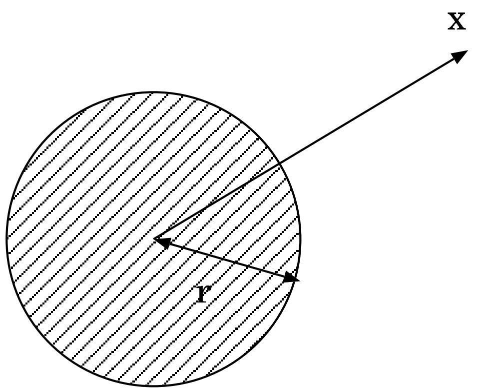
問題 2. (a) 半径 r の一様球電荷の電場を計算せよ。(ガウスの法則を利用するとよい)
(b) 半径 $r'(< r)$ の球の穴が空いているとする。その時の電場を求めよ。
(c) 外から穴の位置$\boldsymbol{a}$は求められるか?

ここでの課題は、ガウスの法則の使い方である。

(a)
球電荷の中心を原点とし、点$\boldsymbol{x}$における電場を$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$とする。対称性から原点から距離 $x = |\boldsymbol{x}|$ の点における電場の大きさは等しく、またその方向は $\boldsymbol{x}$ に等しい。原点から距離 x の球面での電場の大きさを $E(\boldsymbol{x})$ とすると、$x > r$ の場合ガウスの法則より、

$$\int_{\text{球面}} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E(x)} = \frac{4/3\pi r^3\rho}{\epsilon_0} \tag{5}$$

ここで、ρ は球の電荷密度である。



今の場合は左辺は、$4\pi x^2 E((x))$ なので、まとめると

$$E(\boldsymbol{x}) = \frac{r^3\rho}{3\epsilon_0 x^2} \tag{6}$$

方向は$\boldsymbol{x}$なので、ベクトルで書くと、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{r^3\rho}{3\epsilon_0 x^2}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \tag{7}$$

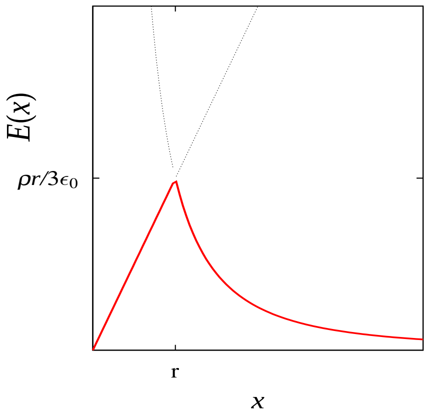
一方で、$x < r$ の場合は、x の外側にある電荷の寄与はなく、また、ガウスの法則の左辺は上と同じである。右辺は、半径 x の中にある電荷 $/\epsilon_0$ なので、

$$
\begin{aligned}
4\pi x^2 E(\boldsymbol{x}) &= \frac{4/3\pi x^3 \rho}{\epsilon_0} \\
E(\boldsymbol{x}) &= \frac{x\rho}{3\epsilon_0} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

これもベクトルで書くと

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{x\rho}{3\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \qquad (9)
$$

電場の大きさ $E(\boldsymbol{x})$ を x の関数でプロットすると図のようになる。



ϵ

(b)

穴が空いている場合は、穴が空いていない場合から穴のところに反対電荷の球を置けばよい。ここで重ね合わせの原理を使うわけである。重ね合わせの原理は必ずしも存在する電荷ばかりである必要はなく、このようにも使える。空洞の中心の位置ベクトル$\boldsymbol{a}$、半径を r' とすると、上記の結果を使って、電荷密度 $-\rho$ の球電荷の作る電場 $\boldsymbol{E'}(\boldsymbol{x})$ が分かる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}) &= -\frac{\rho}{3\epsilon_0}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \quad (|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < r') \qquad (10) \\
&= -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{r'^3}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}) \quad (|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| > r') \qquad (11) \\
& \qquad (12)
\end{aligned}
$$

この結果と、前の結果を重ね合わせるが、3 つの場合 (i) 球の外側、(ii) 球の内側で空洞の外、(iii) 球の内側で空洞の中に別けられる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{tot}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}' &= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\boldsymbol{a} \quad (iii)\text{ の場合} \qquad (13) \\
&= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\boldsymbol{x} - \frac{r'^3}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \quad (ii)\text{ の場合} \qquad (14) \\
&= \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{r^3}{|x|^3}\boldsymbol{x} - \frac{r'^3}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right) \quad (i)\text{ の場合} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

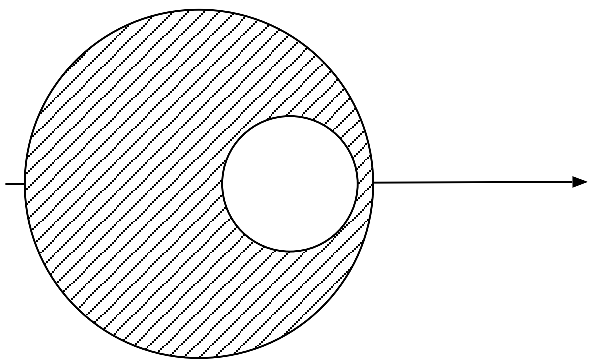
幾つかのレポートで (ii) を (iii) と混同している場合があったが、よく考えてみよう。また、重ね合わせは電場 (ベクトル場) について成り立つのであって、大きさを重ね合わせてはいけない。

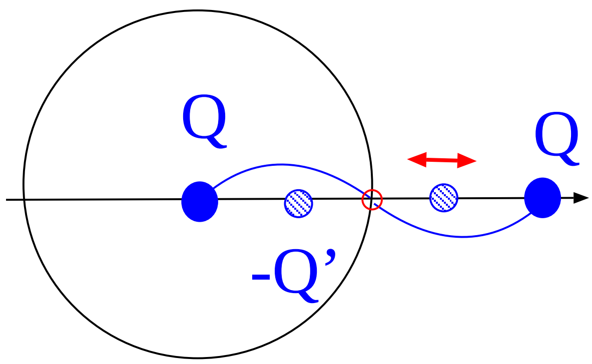
(c)

この問いの趣旨は、どのように力とか電場等の物理量を測定するかということを少し考察してみようということだ。例えば、温度はどのように計るか考えてみると、決して温度そのものの値が分かる計測器なんて世の中には存在しない。カゼをひくときに御世話になる体温計はどうだろうか。水銀計だと目盛を読めば体温は分かるわけだが、温度は決して水銀の長さ (体積) ではない。これは水銀の温度に依存した膨張特性を利用しているのだ。デジタル式の温度計も詳細は知らないが、導線の電流の温度特性などを利用しているはず。つまり、温度に敏感な物性と温度の対応関係、「ある温度では水銀がこれこれの目盛まで膨張する」ことをあらかじめ知っているわけだ。体重だってそうでしょう。

その観点から、「問題 (b) の答えは空洞の位置に依存しているから、電場を測定すれば空洞の位置はわかる」というのは決して間違いではないが、あまり面白くない。講義でも少し強調したが、そんなボールを投げられたときにその場でどうすればわかるかということを考察してほしかった。

対象になるのは前問の (i) に相当する。この電場を絵に描いてみるとよくわかるが、一般に決して動径方向ではない。しかし、円の中心と空洞の中心を結ぶ直線上でのみ $\boldsymbol{x}//\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}$ となるために電場は動径方向になる。このことから、例えば球面上にテスト電荷 q' を持ってくると $\boldsymbol{a}$ 方向に向けて力が働く。その方向への力が感じないところが $\boldsymbol{a}$ になる。また、そこでの電場の大きさは最小になるので、その点を探すという解答も多かった。





次に位置も知りたいわけであるが、これは電場の大きさを観測して、$E(x)$ の標識と比べて、解いてみるというのが典型的な答えであった。

こんな方法はどうだろうか?

すでに$\boldsymbol{a}$の方向はわかっているものとする。球の外からみれば、電荷 $Q=\frac{4\pi r^3\rho}{3}$ が中心にあり、電荷 $Q'=-\frac{4\pi r'^3\rho}{3}$ が$\boldsymbol{a}$にある状況と同じに見える。そこで、$\boldsymbol{a}$方向で、球面から距離 r のところに点電荷 Q を固定し、表面にテスト電荷を置く。そして、その間をもう 1 つの点電荷 $-Q'$ をそっと動かしてみる。テスト電荷の受ける力が無くなるような点電荷 $-Q'$ の位置の球面に対称な点に空洞の中心がある。[a]

[a]昨日思い付いたので、間違っているかも知れない。