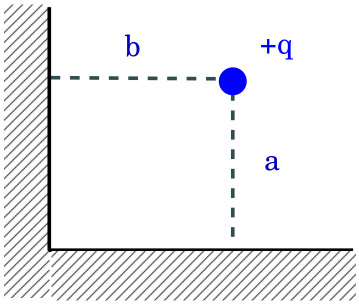
第三回レポートの感想と解答例

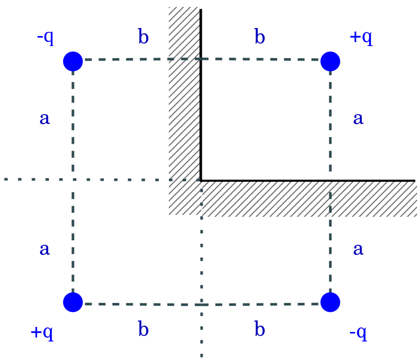
福島孝治 (東大総合文化)
平成 15 年 1 月 17 日 Ver.1

問題 1. 直角に曲がった導体板の近くに電荷を持ってきたときの電位・電場を求めよ (右図)。映像法を使うとよい。また、導体表面への誘導電荷を計算せよ。(全誘導電荷は総映像電荷に等しいはずである。これを確かめよ。)



ここでの課題は言うまでもなく、講義でやった映像法の理解である。映像法は、導体表面を鏡だと思って、導体の外にある電荷の鏡像の位置に反対符合の電荷を置くことで電場を求める方法である。この方法だと、ある解の候補はすぐに思い付くだろう。みなさんは正しく鏡像電荷を置いていた。次に、それが正しいかどうかを**どのように**調べるか問題となる。

さて、解答例。



みなさんが選んだ正しい鏡像電荷配置は、図のようである。xy 平面で切り取ったときに、第二、第三象限に負電荷 $-q$ を置くだけでなく、第四象限にも正電荷 $+q$ を置く必要がある。もともとの電荷の位置を $\boldsymbol{r}_1 = (b, a, 0)$、それぞれの鏡映電荷の位置ベクトルを、$\boldsymbol{r}_2 = (-b, a, 0)$、$\boldsymbol{r}_3 = (-b, -a, 0)$、 $\boldsymbol{r}_4 = (b, -a, 0)$ とする。さて、導体を忘れて、この四つの点電荷配置での位置$\boldsymbol{x}$での電位は、

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_1|} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_2|} + \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_3|} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_4|}\right) \tag{1}$$

となる。この問題での我々の電位に対する要請は、導体表面で電位が定数[1]となることである。そうすれば、導体表面での電場はその表面に垂直方向だけになる[2]。導体表面は、$\boldsymbol{x}_1 = (x > 0, y = 0, z)$ と $\boldsymbol{x}_2 = (x = 0, y > 0, z)$ で表される。$\boldsymbol{x}_1$ について、$|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{r}_1| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{r}_4|$ また $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{r}_2| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{r}_3|$ であることから、

$$\phi(\boldsymbol{x}_1) = 0 \tag{2}$$

がわかり、同様に $\phi(\boldsymbol{x}_2) = 0$ であることもわかる。これで式 (1) が求めたい電位である

[1]必ずしも 0 になる必要はない。そもそも電位には定数の不定性があったことを思い出そう。その定数は電場$\boldsymbol{E}= -\nabla\phi$ には寄与しない。

[2]もし水平成分がゼロでないとすると、導体中の自由に動ける電荷がその電場方向に移動し、最終的には電場を中和するように電荷配置が変わる。

ことが示された。電場は、各成分ごとに表すと、

$$
\begin{aligned}
E_x(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial x}\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x-b}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_1|^3}-\frac{x-b}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_4|^3}-\frac{x+b}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_2|^3}+\frac{x+b}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_3|^3}\right) \quad (3)\\
E_y(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial y}\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{y-a}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_1|^3}-\frac{y-a}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_2|^3}+\frac{y+a}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_3|^3}-\frac{y+a}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_4|^3}\right) \quad (4)\\
E_z(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial z}\phi &= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_1|^3}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_2|^3}+\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_3|^3}-\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_4|^3}\right) \quad (5)
\end{aligned}
$$

比例定数は適当に設定し、電位と電場を下図に描いておく。

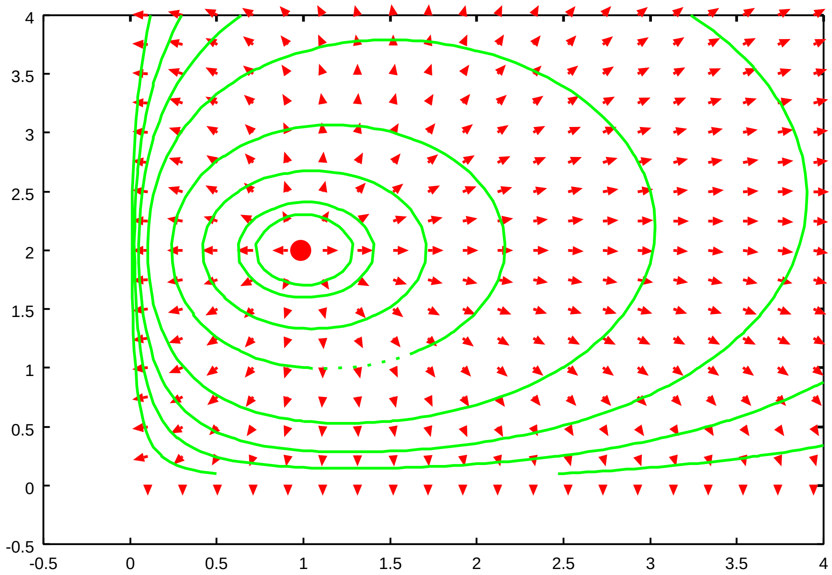


図 1: 点電荷を $(1,2,0)$ に置いた場合の $z=0$ 平面上での等電位線 (線) と電場 (矢印)。

次に導体表面に誘起された電荷分布を示す[3]。ガウスの法則から、導体表面での電場の法線成分と誘起電荷面密度の関係は、$E_n = \sigma/\epsilon_0$ なので、平面 $y=0$ と $x=0$ 上の電荷密度をそれぞれ σ_y、σ_x と書くと、

$$
\begin{aligned}
\sigma_{y=0} = \epsilon_0 E_y(\boldsymbol{x}_1) &= \frac{-qa}{2\pi}\left(\frac{1}{((x-b)^2+a^2+z^2)^{3/2}}-\frac{1}{((x+b)^2+a^2+z^2)^{3/2}}\right) \quad (6)\\
\sigma_{x=0} = \epsilon_0 E_x(\boldsymbol{x}_2) &= \frac{-qb}{2\pi}\left(\frac{1}{(b^2+(y-a)^2+z^2)^{3/2}}-\frac{1}{(b^2+(y+a)^2+z^2)^{3/2}}\right) \quad (7)
\end{aligned}
$$

となる。$\sigma_{y=0}$ について、図に描いてみる (図 2)。

[3] くどいかも知れないが、あくまでも鏡映法は、境界値問題のひとつの解き方であって、決して鏡映電荷が導体の中に出てくるわけではない。導体に誘起される電荷分布は表面にのみ現れる。その誘起された問題と鏡映電荷の問題が、導体の外側では全く等価だということを注意しておく。

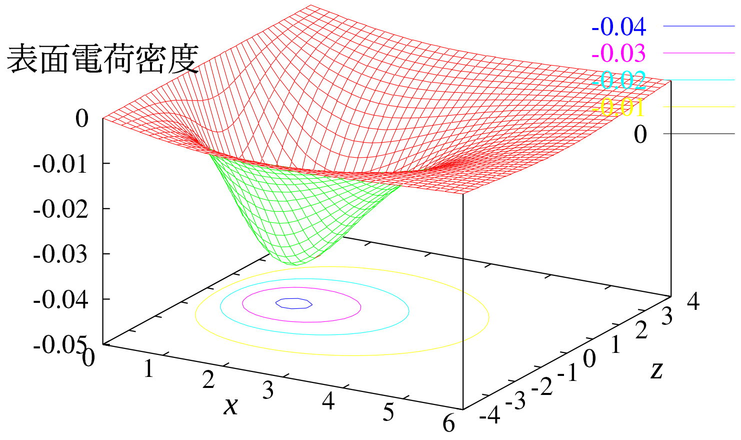


図 2: 点電荷を $(1,2,0)$ に置いた場合の $y=0$ 平面上に誘起される表面電荷分布とその等高線。縦軸のスケールは適当に決めた。

さて、最後の課題はこの誘起電荷分布を導体表面で積分するとどうなるかを調べることである。もちろん、これは先に導入した鏡映電荷の合計に等しくなっているはずである。ここで少し漠然とした疑問がある。無限平面の近くに1つだけ点電荷がある場合は、誘起電荷を与える**項**はその点電荷から来ていた。今回の場合、平面は $y=0$ と $z=0$ の2つに分けられるが、$\sigma_{y=0}$ にも $\sigma_{z=0}$ にも全ての点電荷の項が入っている。それぞれ独立に計算 (できたと) すると $-q/2$ づつ分配されて出てくるのだろうか。

まず、$y=0$ 平面に誘起される全電荷 $q_{y=0}$ は、

$$\begin{aligned} q_{y=0} &= \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \sigma_{y=0} \\ &= \frac{-qa}{2\pi}\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dz \left(\frac{1}{((x-b)^2+a^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+b)^2+a^2+z^2)^{3/2}}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

この積分がちょっと難しかったようだ[4]。被積分関数の x 依存性だけがちがうのが気持ち悪いので、$x \pm b \to x'$ 変数変換すると、測度は不変で積分領域がずれる。

$$\begin{aligned} q_{y=0} &= \frac{-qa}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dz \left(\int_{-b}^\infty dx - \int_b^\infty dx\right)\frac{1}{(x^2+a^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-qa}{\pi}\int_0^\infty dz \int_{-b}^b dx \frac{1}{(x^2+a^2+z^2)^{3/2}} \\ &\downarrow \quad z \text{ について積分} \int dz \frac{1}{(A^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z}{A^2(z^2+A^2)} \\ &= \frac{-qa}{\pi}\int_{-b}^b dx \left[\frac{z}{(x^2+a^2)(z^2+x^2+a^2)^{1/2}}\right]_0^\infty \end{aligned}$$

[4] わたしにとっても難しかった。ここで実際に計算して見せる派としない派に分かれた。「計算すると誘導電荷は $-q$ になる」とだけ書くのはどうだろうか。なるのは当り前といえば当り前なので、計算してみせない場合は書かないのと同じでは。。。久々に arctan なる関数を見た。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-qa}{\pi}\int_{-b}^{b} dx \frac{1}{x^2+a^2} \\
&\downarrow \quad x = a\tan\theta, dx = a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta \\
&= \frac{-qa}{\pi}\int_{\arctan(-b/a)}^{\arctan(b/a)} d\theta a \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)} \\
&= -\frac{q}{\pi}\left(\arctan(b/a) - \arctan(-b/a)\right) = -\frac{2q}{\pi}\arctan(b/a) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

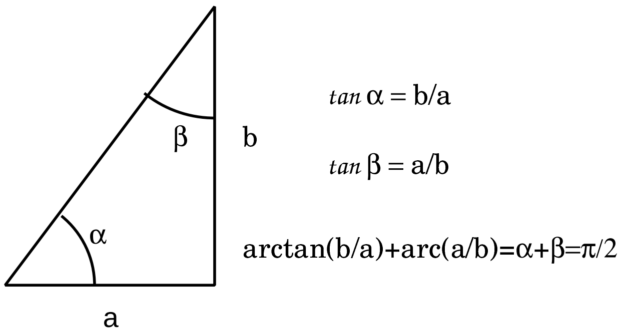
$x=0$ 平面についても同様な計算から、

$$
q_{x=0} = -\frac{2q}{\pi}\arctan(a/b) \qquad (10)
$$

となり、全誘起電荷 q_{tot} は、

$$
\begin{aligned}
q_{tot} &= -\frac{2q}{\pi}\left(\arctan(b/a) + \arctan(a/b)\right) \\
&\downarrow \quad \arctan(b/a) + \arctan(a/b) = \frac{\pi}{2} \\
&= -q \qquad (11)
\end{aligned}
$$

これで誘起電荷が鏡映電荷の合計に等しいことが示された。最後の arctan の関係式はなかなか気づきにくいが、図で描くと良く分かることを示してくれた学生がいた。
先程の電荷の分配の疑問だが、上記のように点電荷の位置のずれに反映して 2 つの平面に移る電荷の大きさが変わって来る。ちょうど位置が $\boldsymbol{r_1} = (a, a, 0)$ のときに $-q/2$ づつに分かれている。



- 今日の not so Frequently Asked Questions -

1. **物理で使う数式は意味はわかるが、変形できないことが多い。物理でよく使う積分等をプリントにまとめて配布して欲しい。**

   物理学にとって数学は道具なので、いろいろな数学が必要とされています。分野が違えば「よく使う」積分を違って来るので、ひとまとめにはできない。この要求は勘弁して欲しい。でも、よく使う公式集はこれ。「岩波の数学公式」３部作[5] がある。それぞれ、I　微分積分・平面曲線　II　級数・フーリエ解析　III　特殊函数　が納められている。図書館にもあるはず。

[5] http://www.iwanami.co.jp/.BOOKS/00/0/005507+.html

問題 2. 容量が C_1,C_2 の 2 つのコンデンサーにそれぞれ電荷 q_1 と q_2 を蓄えてある。その 2 つのコンデンサを並列につなげるとコンデンサーのエネルギーは必ず損をする。(a) このことを示してみよう。(b) また、損したエネルギーはどこにいってしまったのか?

ここでは電位ポテンシャルを実感してみること、コンデンサーの静電エネルギーがわかることなどのチェックが目的である。(b) は少し考察をしてみようということだった。

(a) 2 つのコンデンサーをつなぐ前の静電エネルギーは、

$$U_{pre} = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} \tag{12}$$

並列につなぐと、2 つのコンデンサー間の電位差は等しくなる。等しくなるまで、電荷の移動が行われる。その時の C_1 に蓄えられた電荷を q_1'、C_2 の電荷を q_2' とすると、電位の釣り合いは、

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2} \tag{13}$$

である。また、つなぐ前後で電荷は不変であるから、$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$ となり、これらを解くと、

$$q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2) \tag{14}$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2}(q_1 + q_2) \tag{15}$$

よって、並列につなげたときのコンデンサーの静電エネルギーは、

$$\begin{aligned} U_{post} &= \frac{q_1'^2}{2C_1} + \frac{q_2'^2}{2C_2} \\ &= \frac{C_1(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)^2} + \frac{C_2(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)^2} \\ &= \frac{(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)^2} \end{aligned} \tag{16}$$

となる。前後のエネルギー差 ΔU は、

$$\Delta U = U_{pre} - U_{post} = \frac{(C_2 q_1 - C_1 q_2)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)} > 0 \tag{17}$$

これだけエネルギが損失していることがわかる。エネルギー損は、

$$\frac{C_1 C_2 (q_1/C_1 - q_2/C_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \propto V_1 - V_2 \tag{18}$$

とも書け、最初に電位差がなければエネルギー損はないと言える。このときは電荷の移動を伴わないこともわかる。

(b) さて、この減ってしまったエネルギーはどこにいったのか。正直なところ、私も解答には自信ないので、みなさんにも再考して欲しい。但し、レポートの中には (ほとんど) 正解はなかった。幾つかの典型的な解答例に対してのコメントを示す。是非、理系の学生として、健全な批判力を身につけて欲しい。というのが感想である。

1. 「ジュール熱としてエネルギーは放出される」

   これが最も多かった解答であった。しかし、これはおかしくはないだろうか? そもそもジュール熱は[6]、電流 I が単位時間当たりに外部にする仕事が変化した熱のことで、オームの法則が成り立つ導線は、導線の抵抗を R として RI^2 となる。でも、今回はコンデンサーをつなげる導線の特性については何も問わずにこの結果を得た。つまり、導線の抵抗 R などに依らずにエネルギーが減っているように見えるわけで、とっても「ジュール熱」とは思えない。自然はいろんな導線をもっていて、例えば電気抵抗がゼロになる超伝導物質がある。これでつないでも、エネルギーはどこかへいってしまうわけだ。得られた結論にはど んな根拠があるのかよく考えてみよう。

2. もう少し考察を加えて、「ジュール熱を計算するとエネルギー損と一致する」

   一瞬、だまされた気になってしまうこの考察には 2 つの種類がある。

   (a) エネルギー保存側から

   移動する電荷を $q(t)$ とし、静電エネルギーの和と失われるジュール熱の和は常に一定であることを式で書くと、

   $$\frac{1}{2}\frac{(q_1-q(t))^2}{C_1}+\frac{1}{2}\frac{(q_2+q(t))^2}{C_2}-R\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2=constant \tag{19}$$

   両辺を時間 t で微分して、$q(t)$ の微分方程式を導き、それを解いて電流 $I(t)=dq(t)/dt$ を求め、ジュール熱を計算。

   $$\int_{t=0}^{t=\infty}RI^2(t)=\cdots=\text{エネルギー損} \tag{20}$$

   となり、「静電エネルギーの減少分はジュール熱となった」としている。しかし、式 (19) ははじめから、エネルギーの減少分がジュール熱としている。式 (19) の中の $RI^2(t)$ の項は実は何でもいいとも言える。謎のエネルギー保存関数 $f(t)$ としても差し支えない。結局ここで示しているのは、$f(t)$ を時間積分すれば、エネルギー損に一致することだが、$q(t)$ の初期値と最終値は既に知っていて、エネルギー保存を仮定しているので、この結果は当然なのだ。

   (b) オームの法則から...

[6] 講義では取り扱わなかった。

並列につないだ回路での電荷の動きを考える。オームの法則は $V = IR$ であるが、電流 $I(= dq_1/dt = -dq_2/dt)$ はコンデンサー間の電荷の移動と考えると、$V = IR$ は

$$V(t) = \frac{q_2(t)}{C_2} - \frac{q_1(t)}{C_1} = RI = R\frac{dq_1(t)}{dt} \tag{21}$$

となり、電荷保存から $q_1(t) + q_2(t) = q_1(t=0) + q_2(t=0)$ から、

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = -\frac{1}{R}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} q_1(t) - \frac{q_1 + q_2}{C_2}\right) \tag{22}$$

この方程式を解いて、$I(t) = dq_1/dt$ を求め、最終的にジュール熱

$$\int_{t=0}^{t=\infty} dt R I^2(t) = \cdots = \text{エネルギー損} \tag{23}$$

を示す。これはとってもよさそうに見えるのだが、式 (21) の右辺を見るとオームの法則を使って、ジュール熱に行きたがっているのだが、左辺は電位差 $V(t)$ であり、その時間変化を議論したいわけだ。

つなぐ前の $t = 0$ ではコンデンサー板間には電位差がある場合だけエネルギー損が起こるが、その場合は電位差を無くすように電荷の移動が起こり、最終的には電位差はゼロになる。その条件から電荷の移動量 $q_1' - q_1$ を前問では求めた。実はその電荷移動に伴う仕事がエネルギー損で、それは単位時間当たりの仕事 $V(t)I(t)$ を積分すればいい。これは、上の計算とほぼ同一になるかな? 但し、オームの法則を使って右辺に行く必要は必ずしもないのではないか。