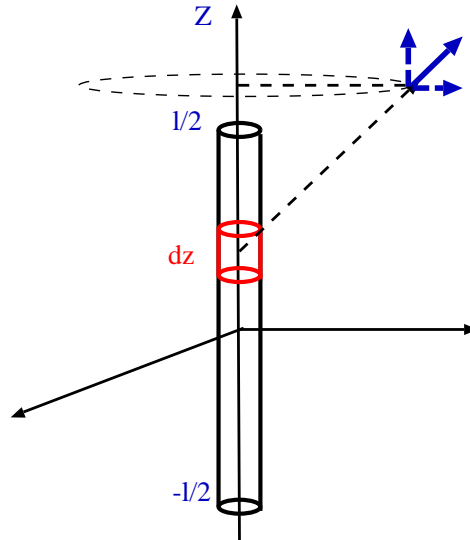


2.4 対称性のよい電荷分布の作る電場の例

1. 直線電荷の作る電場

右図のように、長さ l の直線上に一様な線密度 λ で分布している電荷の作る電場を求める。ここでは、円柱座標系¹を用いるとよい。線要素 dz の持つ電荷 λdz が位置 (ρ, ϕ, z) に作るクーロン場を $-l/2$ から $l/2$ まで重ね合わせればよい。電場の動径方向、角度方向、鉛直方向の成分をそれぞれ E_ρ, E_ϕ, E_z とする。クーロン場の性質より、 $E_\phi = 0$ となるのがわかるので、残りの 2 つをそれぞれ求めることにする。



動径成分： E_ρ

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' \frac{\lambda(\rho - 0)}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\
 &\downarrow (z - z' = \xi \text{ と置く}) \\
 &= \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \frac{\xi}{\rho^2(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \Bigg|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \left[\frac{z+l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

この積分はチェックしておこう。

鉛直成分： E_z

$$\begin{aligned}
 E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' \lambda \frac{z - z'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{\xi}{(\rho^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{(\rho^2 + \xi^2)^{1/2}} \right) \Bigg|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+l/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-l/2)^2}} \right] \quad (2)
 \end{aligned}$$

¹これは力学でやっただろうか?

チェック 1. l が小さい極限 ($l \rightarrow 0$) の時に, 電荷分布は点電荷のようにみえるはずである. そうなることを確かめよ. もっとも, 式 (1), (2) 中の l を 0 と置いてはどちらも 0 になってしまう. どうする?

チェック 2. 線が無限に長い場合は以下のようになる.

$$E_z = 0 \quad (3)$$

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (4)$$

2. 一様平面電荷の作る電場

平面の一様電荷分布を σ とし, ある観測位置 \mathbf{x} での電場 \mathbf{E}

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (5)$$

となる. 平板は無限に広がっている場合について考察する.

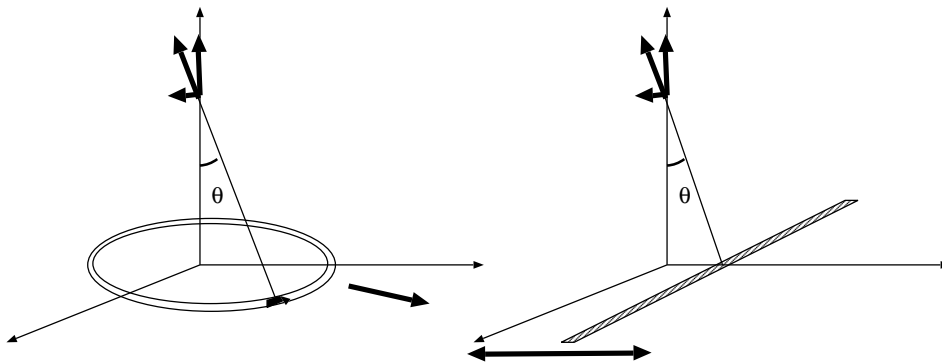


図 1: 平面を分割する方法

解法 1

ここで, 積分は平面について行うわけだが, 幾つかのやり方がある. ほとんどの教科書にのっている, おそらくもっとも簡単にできるのは円環分割であろう. 観測点から電荷平面に垂直に下ろした点を原点として, 半径 r の円環から来る電場を考える (図左). 対称性から, 平面に水平成分はない. 円環上のある部分からの水平方向の電場は, 円環のちょうど反対側から反対方向の電場が同じ大きさであるから, キャンセルする. 結果として, 垂直成分 (z 方向とする) のみ考えればよい. 円環上の電荷は $2\pi r\sigma$ であり, 電場の大きさは,

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr 2\pi r \sigma \frac{1}{z^2 + r^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

$$\begin{aligned}
&\downarrow \int dr \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \\
&= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-(z^2 + r^2)^{-1/2} \right]_0^\infty \\
&= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|}
\end{aligned} \tag{6}$$

となる。答えは、

$$\mathbf{E} = \left(0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \quad \text{または} \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z \tag{7}$$

\mathbf{e}_z は z 方向の単位ベクトル。

解法 2

前項では無限に長い直線電荷の作る電場を計算した。ここでは、平面を無限に長い直線の集まりだと考える (図右)。線密度 ρ としてときに、直線電荷の作る電場は、その動径方向だけで、直線との距離 r で表せる：

$$E_r^{\text{直線}}(\mathbf{x}) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \tag{8}$$

線密度と面密度の関係は、 $\rho = \sigma dx$ である。

$$\begin{aligned}
E_z(\mathbf{x}) &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2 + z^2)^{1/2}} \cos \theta \\
&\downarrow \cos \theta = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}} \\
&= \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + z^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

この積分をどうしようか。複素積分の知識を使うと、 $x = iz$ の極の留数を拾えばよい。²

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + z^2} = 2\pi i \lim_{x \rightarrow iz} (x - iz) \frac{1}{x^2 + z^2} = 2\pi i \lim_{x \rightarrow iz} \frac{1}{x + iz} = \frac{\pi}{|z|} \tag{10}$$

これで $E_z = \frac{\sigma}{2\pi}$ が得られる。

チェック 3. 上の結果を使えば、平行平板コンデンサーの中の電場どのようになっているかがわかる。すなわち、2枚の大きな平板にそれぞれ電荷 $q, -q$ を帯電させて、距離 d だけ離しておく。その場合の電場を考察せよ。

3. 球対称な電荷の作る電場

半径 a の球面上に一様な面電荷密度 σ で分布している球殻の作る電場を考える。これは宿題にする。

²あるいは、 \arctan で書くか?