ノート (電磁気 A)
福島孝治 (東大院総合文化)
ver. 1.0: 2003.11.19

補足： ストークス (Stokes) の定理

ベクトル場一般に成り立つ回転 (rot) についてストークス定理は,

$$\int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \mathrm{d}S = \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A} \tag{1}$$

である.

- 右辺は，**ある閉曲線**C についてのベクトル場の線積分である.
- 左辺の被積分関数には，微分演算子ナブラ ∇

$$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

  とベクトル場$\boldsymbol{A}$とのベクトル積

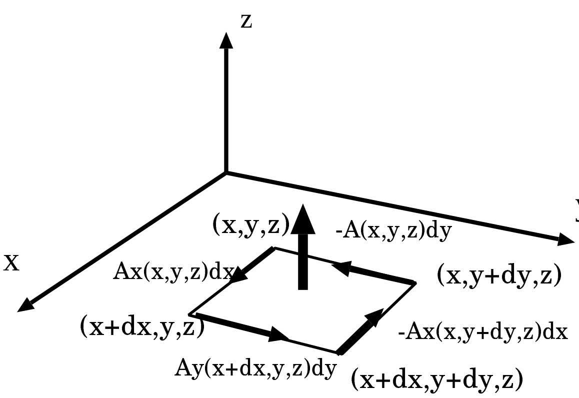
$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \mathrm{rot} A$$

  があり，これは**ベクトル場の回転 (rotation)** と呼ばれている．その積分は閉曲線 C で囲まれた**閉じた曲面**での面積分であり，被積分関数はベクトル場の回転と面上での法線ベクトルとの内積である.

このストークスの定理はガウスの定理と並んで，ベクトル場を解析する上でよく使われる定理である.

証明：

ガウスの定理の証明でも行ったように，左辺から右辺が出て来る様子を見ることにする．まず，簡単のために xy 平面に平行な微小な面を考える．面積要素を $dS = \Delta x \Delta y$ とすると，法線ベクトル$\boldsymbol{n}$は z に平行になるので，積分の寄与は,



$$n_z (\nabla \times \boldsymbol{A})_z dS = n_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

となるが，これは偏微分の定義,

$$\frac{\partial}{\partial x} A_y = \frac{A_y(x + \Delta x, y, z) - A_y(x, y, z)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} A_x = \frac{A_x(x, y + \Delta y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta y},$$

を使えば，左辺は，

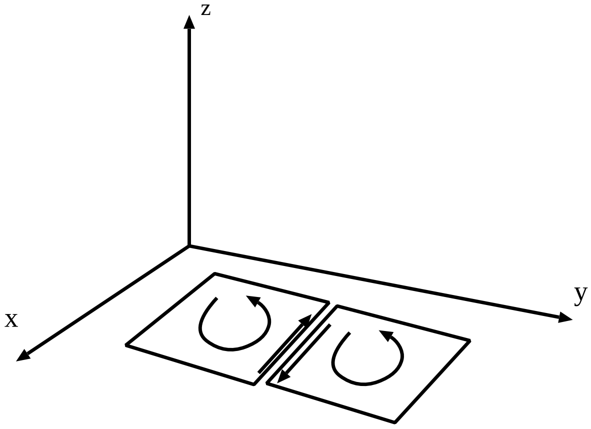
$$\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dS = A_y(x+\Delta x,y,z)\Delta y - A_y(x,y,z)\Delta y - A_x(x,y+\Delta y,z)\Delta x + A_x(x,y,z)\Delta x$$

となる．これは，図に書いてみるとわかるように，点 (x,y,z) から出発して，反時計回りに面積要素 dS の周囲を循環 (回転) する線積分に他ならない．すなわち，

$$\int_{\text{閉曲面で囲まれた微小面積}} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S = \oint_{\text{微小閉曲面}} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} \tag{2}$$

となり，微小面積 dS の場合は式 (1) が成り立っていることが示せた．

次にこの閉曲面が 2 つ並んでいる場合を考える．全体を一つの閉曲面 S と考えることは，2 つの閉曲線で囲まれた面 S_1, S_2 を別々に考えることは同じことになる．右辺の線積分領域の違いは，2 つに分けて考えた場合は境界に余計に入る 2 本の線 (についての積分) だが，ここでの線積分の方向は逆方向であるので，その線での寄与はいつでもキャンセルされている．このことから，



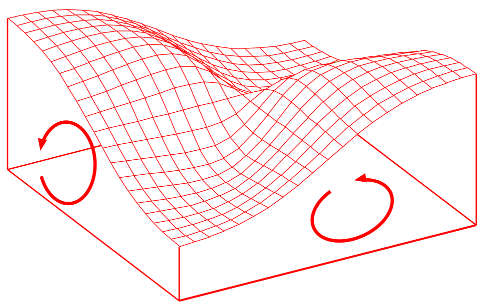
$$\begin{aligned}
\int_{\text{全平面 }S} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S &= \int_{\text{部分面 }S_1} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S + \int_{\text{部分面 }S_2} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}S \qquad (3)\\
&= \left(\oint_{\text{微小閉曲面 }C_1} + \oint_{\text{微小閉曲面 }C_2}\right) d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A}\\
&= \oint_{\text{S を囲む閉曲面 }C} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{A} \qquad (4)
\end{aligned}$$

となり，2 つの閉曲面の場合にも成り立つことが示せた．このまま広い閉曲面の場合にも細かく分割することで同様に示せる．

さて，平坦な平面については証明できたとすると，次に一般の面についての場合が気になる．今、対象となるウネウネ平面を平坦な面で囲んでしまった閉曲面 S を考える (右図)。そこで、ベクトル場 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ に対するガウスの定理 (発散定理) は、

$$\int \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dV = \int \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dS \tag{5}$$

ところで、左辺はベクトル場の性質よりゼロになる $(\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0)$。



上のウネウネ面についての Stokes の定理を示したい。こんな図でイメージつかめるだろうか?

一方で、右辺は、

$$\int \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dS = \int_{\text{ウネウネ}} + \int_{\text{平坦}} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dS = 0 \tag{6}$$

となるので、次のようになる。

$$\int_{\text{ウネウネ}} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dS = -\int_{\text{平坦}} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dS \tag{7}$$

右辺には、(すでに示した)Stokes の定理を使って、それぞれウネウネ面を囲んでいる平坦面の回りの線積分の和に置き換えられる。

$$\begin{aligned}\int_{\text{ウネウネ}} \boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dS &= -\left(\int_{-C_1} + \int_{-C_2} + \cdots\right)\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x} \\ &= \int_{\text{ウネウネ周回}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{x} \end{aligned} \tag{8}$$

というわけで、ウネウネしていてもよいことがわかる。