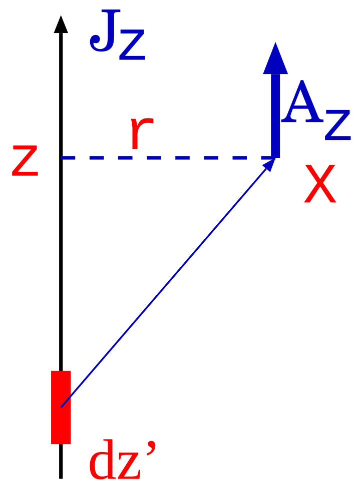
福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)
2004 年 1 月 14 日、Ver. 1.0

直線電流の作る磁場をベクトルポテンシャル経由で求めてみる。

ベクトルポテンシャルの一般解は、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{1}$$



で与えられる。直線電流を z 軸上にとることにすると、J_x,J_y は 0 となり、ただちに $A_x = A_y = 0$ となることがわかる。求めるべき $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の z 成分は、電流の大きさを I として、

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \tag{2}$$

であるが、この積分は次元を見てもすぐ予想できるように log 発散する。そこで、カットオフをつけて計算しておく。

最終的には磁場 $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ を知りたいのであって、そのようなカットオフ[1]は磁場には寄与しない (とうれしい)。カットオフを l^* として、

$$\begin{aligned}
A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l^*}^{l^*} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \\
&\downarrow \left(\text{不定積分} \int dx \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(\sqrt{(a^2+x^2)}+x\right) \text{を使う}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\sqrt{r^2+(z+l^*)^2}+(z+l^*)}{\sqrt{r^2+(z-l^*)^2}+(z-l^*)}\right] \\
&\downarrow\ l^* \gg 1, z/l^* \text{で展開すると} \\
&\downarrow\ \sqrt{r^2+(z\pm l^*)^2} = l^*\sqrt{(1\pm z/l^*)^2+\frac{r^2}{l^*}} \simeq l^* \pm z + \frac{r^2}{2l^*} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[4\frac{l^{*2}}{r^2}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[2\ln\frac{1}{r}+\ln(4l^{*2})\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

やはり、第二項は、$l^* \to \infty$ で log 発散を与える。しかし、磁場の計算には寄与せずに、重要な項は、

$$A'_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r \tag{4}$$

であり、磁場は

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \ = \left(\frac{\partial}{\partial y}A'_z, -\frac{\partial}{\partial x}A'_z, 0\right)$$

[1]積分の上限を有限に止めて計算をする.

$$= \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{r^2}, -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{r^2}, 0\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{e}_r}{r}, \tag{5}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{e}_r = (x/r, y/r, 0)$ で動径方向の単位ベクトル。