ノート (電磁気 B)

福島孝治 (東大院総合文化)

ver. 1.0: 2003.10.30

2.5 ガウスの定理

ベクトル場一般に成り立つ発散 (div) についてガウス定理は,

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}S \tag{1}$$

である.

- 左辺の被積分関数は, 微分演算子ナブラ ∇

  $$\nabla \equiv \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

  とベクトル場$\boldsymbol{A}$との内積

  $$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathrm{div} A$$

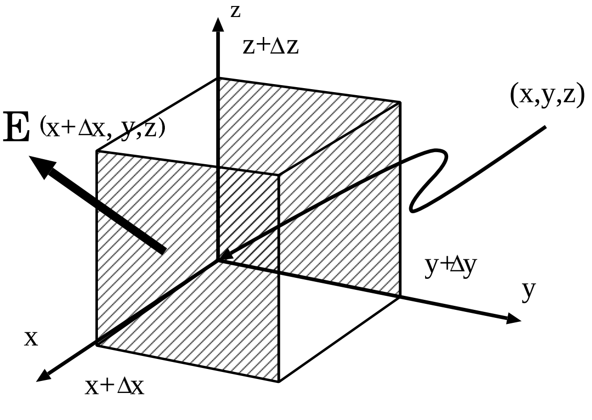
  であり, **ベクトル場の発散** (divergence) と呼ばれている.. その積分領域は**ある閉じた曲面**で囲まれる体積 V であり, その全領域で体積積分される.

- 右辺は, その閉じた曲面での面積分であり, 被積分関数は面上での法線ベクトル[1]$\boldsymbol{n}$とベクトル場$\boldsymbol{A}$との内積である.

- 例えば電場$\boldsymbol{E}$を想定すると, 右辺はある閉曲面から飛び出している電場の垂直成分の合計を表している. 一方, 左辺は閉曲面の中での電場の発散の総量であり, この定理は 2 つが等しいことを言っている.

証明：

ある微小な直方体である体積要素 $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ について, 具体的に右辺を書き下してみることにする. 右辺の中で x 軸に垂直な 2 つの面からの寄与は, その面に垂直な成分 A_x だけであり, 法線ベクトル$\boldsymbol{n}$ が閉曲面の外向けを正としていることに注意すると



$$\{A_x(x+\Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)\} \Delta y \Delta z$$

となるが, これは偏微分の定義を使えば,

[1] 面に垂直な単位ベクトルであり, 閉曲面から外に向く方向を正にとっている.

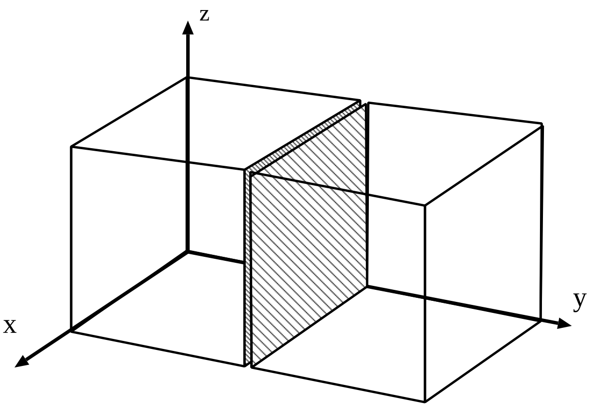
$$\frac{A_x(x+\Delta x,y,z)-A_x(x,y,z)}{\Delta x}\Delta y\Delta z=\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta V$$

となる．残りの y,z 軸に垂直な面の寄与も全て集めると右辺は

$$\begin{aligned}\int_{\text{直方体の表面}}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S &= \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x}\Delta V+\frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y}\Delta V+\frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z}\Delta V\\ &= \nabla\cdot\boldsymbol{A}\Delta V\end{aligned}$$

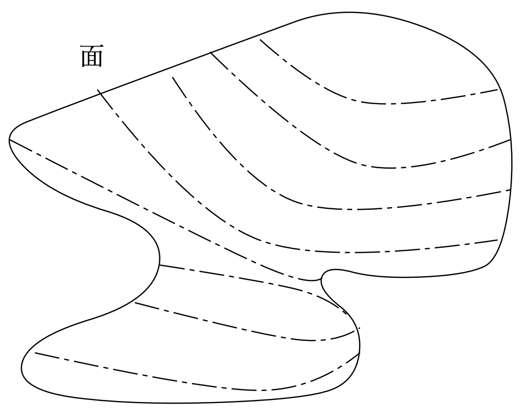
となり，微小体積 ΔV の場合は式 (1) が成り立っていることが示せた．

次にこの直方体が 2 つ並んでいる場合を考える．全体を一つの閉曲面 S と考えることは，2 つの直方体の表面 S_1,S_2 を別々に考えることは同じことになる．(面) 積分領域の違いは，2 つに分けて考えた場合は境界に余計に入る 2 枚の面だが，ここでの法線ベクトルは反対方向であるので，その面での寄与はいつでもキャンセルされている．このことから，



$$\begin{aligned}\int_{\text{全直方体の表面}\,S}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S &= \int_{\text{直方体 }1S_1}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S_1+\int_{\text{直方体 }2S_2}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}S_2\\ &= \nabla\cdot\boldsymbol{A}\Delta V_1+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\Delta V_2 \end{aligned}\tag{2}$$

となり，2 つの直方体の場合にも成り立つことが示せた．



さて，任意の閉曲面についても，結局微小領域に分割すれば同じように示せることがわかる．左の図はなんのことやらよくわからないが，とにかく任意のどんなクネクネしている閉曲面でもこの定理は成り立っている．

ただし，積分がちゃんと定義されていることに注意はする必要がある．例えば，被積分関数が発散しているような点が閉曲面の中に含まれていたりすると，話しは違ってくる．

2.6 ガウスの法則

さて，先のガウスの定理を電場に適用してみる．ベクトル場として，位置$\boldsymbol{r}$にある点電荷 q が作るクーロン電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}|} \tag{3}$$

について考える．点電荷を囲む適当な閉曲面に関して，ガウスの定理を適応することはできない．なぜならば，点電荷の位置で電場$\boldsymbol{E}$は無限大になっているからである．

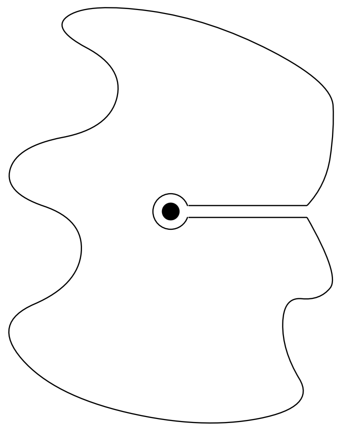
そこで， 点電荷の位置 r を中心とする球から特異点である r の回りの半径 a の微小球を取り除いた閉曲面を考える．その閉曲面 S で囲まれた体積 V 内には特異点は無いので，ガウスの定理を使うことができる．

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV = \int_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS \tag{4}$$

左辺は体積 V のどこでもゼロになる[2]．また，右辺の表面積分の中で，外側の表面と内球をつなぐ表面は、内球が非常に小さいとすると球の法線方向に平行であり、$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=0$ となる。まとめると、

$$0 = \int_{S_{外}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS - \int_{S_{内球}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS' \tag{5}$$

であり、



球の中心をくりぬいた閉曲面のつもり．あんまり３次元球に見えないが...

$$\int_{S_{外}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS = \int_{S_{内球}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS' \tag{6}$$

となる．右辺は簡単に求めることが出来る．内球の表面上での電場はどこでも表面の垂直であり，その大きさは $q/4\pi\epsilon_0 a^2$ であることから，

$$\int_{S_{内球}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS' = q/4\pi\epsilon_0 a^2 \int_{S_{内球}} dS' = \frac{q}{\epsilon_0}$$

となることがわかる．複数の電荷がある場合には重ね合わせの原理から両辺ともに各電荷からの寄与の和として表すことが出来る．こうして，

点電荷の場合のガウスの法則

$$\int_{任意の閉曲面} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS \quad = \quad q/\epsilon_0 \tag{7}$$

任意の閉曲面からわきだしてくる電場の大きさの総量 ＝ その閉曲面で囲まれた内部の電荷の総量 (を ϵ_0 でわったもの)

[2] これはレポートに出すことにする．

が導けた．より一般的に空間に電荷分布 $\rho(x)$ で分布している場合でも，ガウスの法則の右辺を積分で置き換えればよい．

$$\int_{\text{任意の閉曲面}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}dS = \frac{1}{\epsilon_0}\int_v dV\rho(x) \tag{8}$$

ここで得られたガウスの法則を微分の形で書くことは，近接作用の考え方から重要である．そこで，このガウスの法則を無限小の立方体 ΔV に適用する．すると，ガウスの定理のところで示したように，左辺は $\nabla\cdot\boldsymbol{E}\Delta V$ となる．また，その時に式 (8) の右辺は $\rho(x)\Delta V/\epsilon_0$ となり，比べることで，

ガウスの法則の微分形

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \tag{9}$$

が得られた．

このようにクーロンの法則に従う電場は，ガウスの法則を満たすことがわかった．最後の電荷が出てくるところの計算をみると，クーロンの逆二乗則と球の表面積が半径の二乗に比例していることが見事につり合って，キャンセルしていることがわかる．クーロンの法則が逆二乗則から少しでもずれていればガウスの法則はでてこないことになる．ガウスの法則が成り立つことから，クーロンの法則が逆二乗則であることが必然と考えるような短絡的な記述のある本がたまにあるが，そうではないことに注意すべきである．

さて，クーロンの法則とガウスの法則はほぼ同等な法則であり，同じことの違った表現であるとみることができる．ここではクーロンの法則 (電場の与え方) からガウスの法則を示して来た．しかし，逆にガウスの法則から出発して，クーロンの法則が出てくるか，すなわち電場の形が一意的にクーロン電場の形のように決まるかどうかを考えてみると，それは無理であることがわかる．

一般のベクトル場の性質として，

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

であることがわかる．ここで，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ はナブラとベクトル$\boldsymbol{A}$のベクトル積

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) \tag{11}$$

のことである．今，ガウスの法則を満たすベクトル場$\boldsymbol{E}$があるとき，新しいベクトル場

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \nabla\times\boldsymbol{A}$$

もまたガウスの法則 (9) を満たすことがわかる．