福島孝治 (東京大学総合文化)
2003 年 5 月 16 日: ver. 1.1

3-3. 慣性抵抗 (Inertial resistance) のある場合の落下

- 慣性抵抗： 流体がぶつかることによって生じる抵抗力
  - 流体の密度：ρ
  - 物体の断面積： S
  - 速度：v

  単位時間あたりに Sv だけの流体に速度 v で衝突している．力積は $\rho S v^2$ に比例して，流体からの反作用を受ける．

- 落下運動

  運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}z = -mg + k\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{1}$$

ここで，m は質点の質量，g は重力加速度，$k > 0$[1]は抵抗係数．この運動方程式は右辺の第二項に $v_z = dz/dt$ の**二乗**の項を含んでいて，もはや線形ではない[2]．これは非線形微分方程式である．初期条件は，時刻 $t = 0$ で，位置 $z = 0$，速度 $v = 0$ とする． 解くべき方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}z = -g + \frac{k}{m}\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{2}$$

これは一度速度 v の満たす方程式に書き直すと，変数分離の形をしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v &= -g + \frac{k}{m}v^2 && (3)\\
\int_0^v dv' \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} &= \int_0^t dt'(-1) && (4)\\
&\downarrow\ mg/k = A^2 \text{とおくと，左辺の被積分関数は,}\\
&\downarrow\ \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{1}{\frac{k}{m}(A^2 - v^2)} = \frac{m}{k}\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{A+v} + \frac{1}{A-v}\right)\\
&\downarrow\ \text{両辺の積分する．}\\
\frac{m}{2Ak}\left[\log(A+v') - \log(A-v')\right]\Big|_0^v &= \frac{m}{2Ak}\log\left(\frac{A+v}{A-v}\right) = -t && (5)
\end{aligned}$$

[1]今は落下運動に限定しているので正の値をとる．上昇する場合は $k < 0$ になる．

[2]微分方程式の 2 つの解 z_1 と z_2 を持ってきたとき，それらの線形結合 $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ もまたその解になっているにその方程式は線形という．

v について解く．

$$\frac{A+v}{A-v} = \exp\left[-\frac{2Ak}{m}t\right] \Longrightarrow v = -A\frac{1-\exp(-2\frac{Ak}{m}t)}{1+\exp(-2\frac{Ak}{m}t)} = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).^{3} \tag{6}$$

もう一度積分をすることで位置 z に時間発展が得られる．

$$\begin{aligned}
\int_0^z dz' &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right). \\
z(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt\frac{1}{\sqrt{\frac{kg}{m}}}\frac{d}{dt'}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right). \\
&= -\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right)\Bigg|_0^t = -\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

- 図にしてみる．

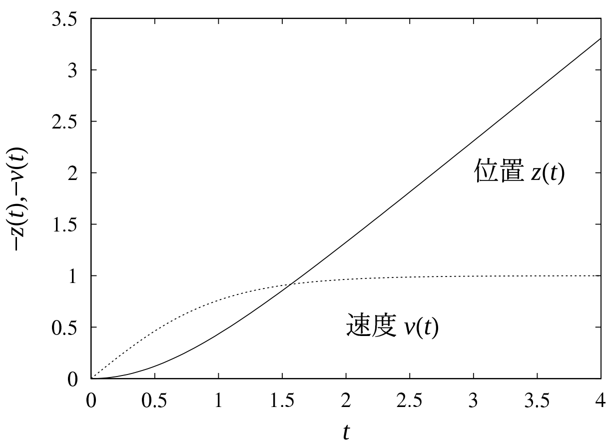

図 1: 位置と速度を時間の関数として描いてみる．係数 m, g, k はすべて 1 とした．

終端速度 v^* は運動方程式 (1) の釣り合いの条件からすぐわかる．終端速度では速度の変化はもはやないので，左辺は 0 になる．これは右辺の力がつり合っていることをいみする．右辺=0 を解くことで，$v^* = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ がわかる．以下ではすぐわかることを見てみる．

- **時間が長い極限** ($t \gg 1$):

[3] 双曲線関数たち $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (hyperbolic cosine),$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $(\sinh x)' = \cosh x$, $\tanh x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} = \frac{d}{dx}\log(\cosh x)$

この極限では，$\log\cosh(\alpha t) = \log\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} \simeq \log(\exp(\alpha t)/2) \simeq \alpha t$ なので[4]，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\sqrt{\frac{kg}{m}}t = -v^* t \tag{8}$$

終端速度での等速運動になっていることがわかる．

– **時間が短い極限** ($t \ll 1$):
時間 t が小さいとして，展開する．

$$\begin{aligned}\cosh\alpha t &\simeq 1+\frac{1}{2}(\alpha t)^2+\frac{1}{4!}(\alpha t)^4+O(t^6)\\ \log\cosh(\alpha t) &\simeq \log'\left(1+\frac{1}{2}(\alpha t)^2\right) \simeq \frac{1}{2}\alpha^2 t^{25}\end{aligned} \tag{9}$$

を使うと，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\frac{1}{2}\left(\frac{kg}{m}\right)t^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{10}$$

これは自由落下を意味している．これも当たり前．初期条件は速度 0 なので，速度の二乗に比例する抵抗力は運動の初期には影響は少ない．

- 位置と速度の関係だけが知りたい場合はもう少し簡単になる．
微分の項式から，速度の時間微分 dv/dt は，

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}v(z) = v(z)\frac{d}{dz}v(z) \tag{11}$$

となるから，この式を代入すると速度 v の微分方程式 (3) は，

$$v\frac{d}{dz}v = -g + \frac{k}{m}v^2 \tag{12}$$

となる．この式もまた変数分離形になっているので，

$$\frac{v}{g-\frac{k}{m}v^2}dv = -dz \tag{13}$$

から積分すればよい．この先はみなさんへの宿題として残しておく．

---

[4]関数の近似について. 一般に関数 f(x) が多項式で書けるとする.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n +$$

* $x = 0$ と置くことで，$f(0) = a_0$
* 一回微分してから $x = 0, \longrightarrow \frac{d}{dx}f(x)\big|_{x=0} = f'(0) = a_1$
* 同様に n 回微分してから $x = 0, \longrightarrow \frac{d^n}{dx^n}f(x)\big|_{x=0} = f^{(n)}(0) = n!a_n$

これから $\Longrightarrow f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^+ \cdots = \sum_m^\infty \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$ とかける.
$x \ll 1$ のとき $f(x) \simeq f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$ を関数 $f(x)$ の x^2 のオーダーでの近似という.
例：
$\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! +$
$\exp(ix) = 1 + (ix) + (ix)^2/2 + (ix)^3/3! + \cdots = (1 - x^2/2 + x^4/4! + \cdots) + i(x - x^3/3! + \cdots)$
$\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! + \cdots$
$\sin(x) = x - x^3/3! + \cdots$ 示してみよう.