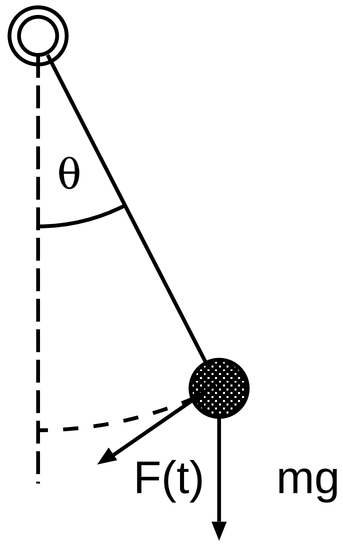
福島孝治 (東京大学総合文化)
2003 年 6 月 20 日: ver. 1.0

5-3. ぶらんこを押して揺らしてみる (振り子の強制振動)



- ぶらんこをうまくこげない子供を後ろから押してやるときの運動を考える．θ 方向の運動方程式に押す力 $F(t)$ を加える．運動方程式は

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + F(t) \tag{1}$$

今，後ろから押す力は $F(t) = F\sin(\omega t + \phi)$ のように角振動数 ω の周期的な力だとする．**微小振動** ($\theta \ll 1$) **の場合**について考えることにし，解くべき運動方程式は,

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + f\sin(\omega t + \phi) \tag{2}$$

となる．ここで,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad f = \frac{F}{ml} \tag{3}$$

とおいた.

- 式 (2) は非斉次線形微分方程式なので，ある一つの特解を $\theta_1(t)$ として，一般解は,

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) \tag{4}$$

と書ける．ただし，$\theta_0(t)$ は斉次方程式の解，すなわち外力が無い方程式の解である．特解として，解の形を

$$\theta_1(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

とおいてみると，式 (2) は,

$$\begin{aligned} -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) &= -A\omega_0^2\sin(\omega t + \phi) + f\sin(\omega t + \phi) \\ &\Longrightarrow \left[(\omega^2 - \omega_0^2)A + f\right]\sin(\omega t + \phi) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

となり，任意の時間 t でこの式が成り立つためには,

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{7}$$

となることがわかる．斉次方程式の解 $\theta_0(t)$ は講義で調べた．振幅を B，位相を ψ として,

$$\theta_0(t) = B\cos(\omega_0 t + \psi) \tag{8}$$

で与えられるので，結局一般解は，

$$\theta(t) = B\cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \phi) \tag{9}$$

となる．

- 初期条件として，真下の位置で止まっている状況を考える．つまり，$\theta(t=0)=0$，$\dot{\theta}(t=0)=0$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= B\cos\psi + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\phi \\ 0 &= -\omega_0 B\sin\psi + \frac{f\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\phi \end{aligned} \tag{10}$$

となり，これらより，

$$\begin{aligned} \theta(t) &= B\cos(\omega_0 t)\cos\psi - Bsin(\omega_0 t)\sin\psi + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \phi) \\ &= \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(-\cos(\omega_0 t)\sin\phi - sin(\omega_0 t)\cos\phi\frac{\omega}{\omega_0} + \sin(\omega t)\cos\phi + cos(\omega t)\sin\phi\right) \\ &= \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\phi\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}sin(\omega_0 t)\right) + \sin\phi\,(cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))\right) \end{aligned}$$

が得られる．

- 特に外力の角振動数 ω と振り子の角振動数 ω_0 が一致するときは，**共鳴**と呼ばれる．その時の解を見ると，$0/0$ になる部分はロピタルの定理[1]より

$$\frac{1}{\omega_0 - \omega}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) \to \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\omega_0 - \omega}\left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right) \to t\sin(\omega_0 t) \tag{12}$$

となり，解は

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{f}{2\omega_0}\left(\cos\phi\left(\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t)\right) + \sin\phi\,(t\sin(\omega_0 t))\right) \\ &= \frac{f}{2\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_0}\cos\phi\sin(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t + \phi)\right) \end{aligned} \tag{13}$$

[1] $h(x) = f(x)/g(x)$ において，$f(x_0) = 0$，$g(x_0) = 0$ のときに，$\lim_{x\to x_0} h(x)$ を知りたいとする．今，$f'(x_0) \neq 0$，$g'(x_0) \neq 0$ ならば，テイラー展開より，

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \cdots} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0) + \cdots}{g'(x_0) + \cdots} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

となることがわかる．

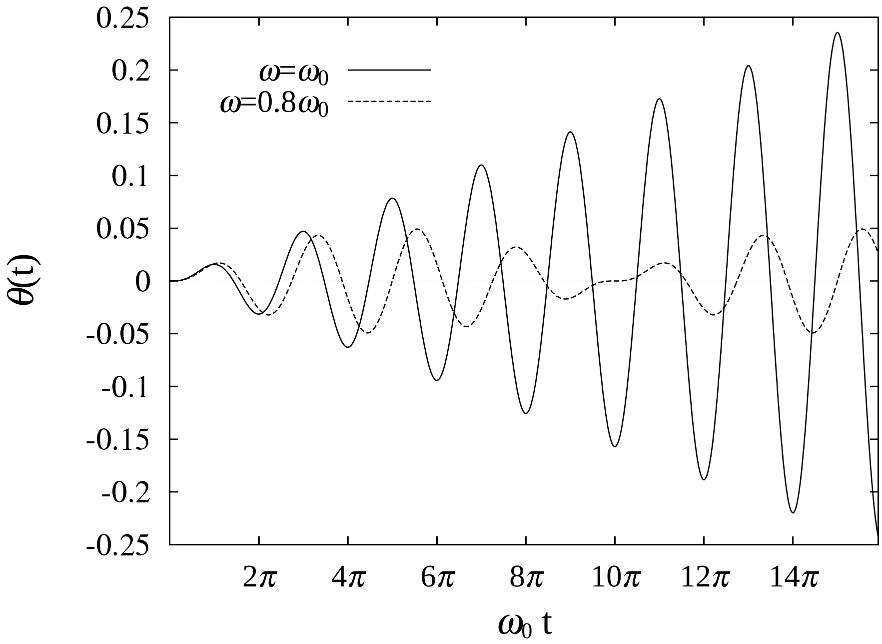


図 1: 振れ角度 θ の時間依存性．外力の位相 ϕ は 0 とし，$f = 0.01$ とした．

ここから，共鳴状態では振幅は時間と共に増大することがわかる．実際に適当なパラメータでの様子を図に示した．図には共鳴状態からずれた場合 $(\omega = 0.8\omega_0)$ の場合も同時に示した．

- ぶらんこをどんどん揺らすためには，ぶらんこの固有角振動数 ω_0 と同じ角振動数で周期的に押すのがよいことがわかる．
- ここでの解析は微小振動の条件の元でのみ正しいが，本質的には揺れを増大させる条件は本質的にこれでよい．
- 共鳴状態での力学的エネルギー E は，式 (13) から求めることができる．

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos\theta) \simeq \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \\ &= \frac{ml^2 f^2}{8\omega_0}\left(\omega_0^2 t^2 - \omega_0 t \sin 2\omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t\right) \end{aligned} \tag{14}$$

どんどんエネルギーが貯っていくことがわかる．ここでは簡単のため $\phi = 0$ とした．

第二回物理学 A レポート問題

福島孝治 (東京大学総合文化)

2003 年 6 月 20 日: ver. 1.0

問題 1. [**力とポテンシャルについて**]：

1. 万有引力は．原点を基準としたポテンシャル・エネルギー $U(x,y,z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ で表される．このときの力 $\boldsymbol{F}$ の各成分を求めよ．
2. 講義で，力が保存力であることと，$\nabla\times\boldsymbol{F}=0$[a] であることに触れた．上で求めた力 $\boldsymbol{F}$ はこれを満たしていることをチェックせよ．
3. バネに働く力 $F=-kx$ は保存力である．そのポテンシャル・エネルギー U(x) を求めよ．

問題 2. [**ぶらんこの続き**]：ある日，公園に 2 つのぶらんこを見つけて，子供と二人でそれぞれぶらんこに乗った．同じ高さから同時に揺らし始めて，その後は一切「こぐ」ことはしなかった．最初は同じ位相で揺れていたが，しばらくすると位相はずれ始めた．

1. この事実は，講義で解説した振り子の方程式では決して説明できない．例えば，講義では微小振動に限った場合を扱ったが，そうでなくてもやはり説明できない．この理由を述べよ．
2. 二人のうち，どちらの周期か早くなったかを議論せよ[b]．

問題 3. [**…**]：もしあれば，講義についてのコメントを下さい．質問でもいいし， 今まで出した宿題のうちで答えがわからないものでもよい．

[a] ここで，$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$.

[b] 適当なモデルをつくってみる．二人の違いは質量の違いでしかないとして，振り子の問題でモデル化をし (ここまでは講義でやった)，例えば,.... 抵抗力を考慮して方程式を解いてみるか？速度に比例する粘性抵抗を考慮する方が簡単．速度の 2 乗に比例する慣性抵抗の場合は解くのが難しい．でも，方程式を解かないで答えは見つけられるかな？

〆切：7 月 4 日の講義の時．16 号館 221A 室に持ってきてもよい．