第一回物理学 A レポート問題の解答例とコメント[1]

福島孝治 (東京大学総合文化)

2003 年 6 月 25 日: ver. 1.0

問題 1. [**ベクトル積について**]：任意のベクトル$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$に対して，次の恒等式が成り立つことを示せ.

1. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
2. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$

解答例：これはベクトル積についてなれるために一度は手を動かして見ようというのが問題の趣旨である．さて，解答は，ほとんどの学生さんがしたように，成分を書き下してみると，簡単に示すことができる．一般的な注意だけど，ベクトルは$\boldsymbol{A}$のように太字で書くことにしよう．そうすることでベクトルかただのスカラー変数かの違いがよくわかる．たまに**ベクトル**=スカラーという間違った式変形を見かけるが，このような表記に従えばそのミスは避けられる．また，ベクトル$\boldsymbol{A}$の成分は(A_x, A_y, A_z)のように普通に書けばよい.

ベクトルの成分を$\boldsymbol{A}= (A_x, A_y, A_z)$のように書くことにする．左辺は,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} &= (B_yC_z - B_zC_y, B_zC_x - B_xC_z, B_xC_y - B_yC_x) \\
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \begin{pmatrix} A_y(B_xC_y - B_yC_x) - (B_zC_x - B_xC_z)A_z \\ A_z(B_yC_z - B_zC_y) - (B_xC_y - B_yC_x)A_x \\ A_x(B_zC_x - B_xC_z) - (B_yC_z - B_zC_y)A_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

一方右辺の成分を書き下すと,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} &= (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\
&- (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_yC_y + A_zC_z)B_x - (A_yB_y + A_zB_z)C_x \\ (A_xC_x + A_zC_z)B_y - (A_xB_x + A_zB_z)C_y \\ (A_xC_x + A_yC_y)B_z - (A_xB_x + A_yB_y)C_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2}$$

この式 (1) と (2) の右辺は等しい．2．についても同様に成分を書き下すことで示すことが出来るが，1．の結果を使うことで成分を書かなくても示すことができる.

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

[1] このプリントでは語尾が一貫していないし，ミスもあるかもしれない．何か間違いや誤解を発見されたら連絡 (E-mail: hukusima@phys.c.u-tokyo.ac.jp) して欲しい.

$$
\begin{aligned}
& + \quad (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} \\
& + \quad (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\text{であることに注意.} \quad & \downarrow \\
& = \quad \mathbf{0} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

以上，等式は示された．
1. に関しては学生さんからとても面白い解法を頂いた．以下に簡単に紹介したい．そこでは，成分を書き下すのではなくて，ベクトル積の幾何学的な意味を考える．$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$ と置くと，ベクトル$\boldsymbol{D}$は$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$に垂直な方向を向いている．求めたいベクトル $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}$ はベクトル$\boldsymbol{D}$と垂直なので，結果として$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$の 2 つのベクトルで張られる面に平行であることがわかる．つまり，2 つの定数 j,k を用いて，

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = j\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{C}$$

と表される．また，$\boldsymbol{E}$は$\boldsymbol{A}$と垂直 ($\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}=0$) であることから，

$$j\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$$

よって，別の定数 l を用いて，

$$j=l\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}, \quad k=-l\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

であることがわかり，まとめると，

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = l(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - l(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

となる．この式は$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$に対して線形である．つまり，例えばそれぞれのベクトルを 2 倍しても成り立つ式である．そこで，何かしら特別なベクトルについて，成り立つように定数 l を決めて良い．$\boldsymbol{A}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{B}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{C}=(1,0,0)$ とすると，$l=1$ がわかり，1. が成り立つことが示された．

問題 2. [**法則について**]：マーフィーの法則 (例えば,「切符を買うためにみどりの窓口に並ぶと両隣の列はどんどん進む」とか「傘を買うと雨は止む」とか) とニュートンの法則の違いを論じよ．

このレポート問題を出した趣旨を説明することにする．それは以下の 2 点にまとめられる．

1. 物理学における法則に対する誤解があるとすれば，この機会に解消しておきたい．

2. その上で，科学と似非科学なるものの違いを認識しておきたい．

特に後者は講義でも繰り返しているとおり，教育の一貫として不可欠なものだと私は思っている．また，今回の例はあまりにも大きくかけ離れた例だったかもしれないが[2]，実際にはかなりギリギリの線をついてくるものもある．それにだまされないための訓練と思って頂ければ幸いである．

まず最初に言っておくがこの問題に対する適切な解答は私は**知らない**．ここではレポートを見ながら感じたコメントを書いてみたい思う．

マーフィーの法則は実に沢山あってその中でもかなり性格の違うものがあり，一概に議論することはできない．しかし，比較的解析ができそうな例をここでは取り扱うことにする．まず，問題では「違いを論じよ」ということだったが，違いはいくらでもあるので，どこまで類似点があるかを見て行くことにしよう．ニュートンの法則との共通点は，どちらも繰り返し体験した**経験則**であるこということである．たまに物理学の法則は(数学的方法等の) なんらかの方法で厳密に証明されていることのように誤解されていることがあるが，決してそうではない．物理学の法則は全て実験によって検証されるものであり，あくまでも自然現象と整合が取れるように理論体系[3]を構築しているわけで，ここが決定的に数学とは違うところである．

条件が揃えば必ず成り立つ マーフィーの法則は必ず成り立つ保証がない．それはすぐにわることである．しかし，ここが本質であろうか．例えば切符の例で言えば，隣りが早く進むというが，その隣りの人はそうではないので,「成り立たない」と思うわけだが，この点はいくらでも誤魔化すことはできる．

確率的な解釈が許されるならば,「両隣が進む確率が大きい」とすればどうだろうか．

主観的か客観的か この指摘はとても重要である．しかし，切符の例でも上のように変更すれば，客観的になっていないであろうか．

数式で書ける このことが法則たる条件と考えているならば，それは大きな間違いであろう．例えば，ニュートンの第1法則は数式で書ける代物ではないのではないだろうか．逆に,「切符」の例は数式で表現することもできる．みどりの窓口にN列あるときに，JRの人が困るようなお客がどの列にいるかというのは全くランダムである，つまり，どの列に時間の掛かるお客がいるかどうかはわからないとする．実はあらかじめどの列が早いかどうかの順番がついているとする．その状況で，自分が一番早い列に行ける確率は$1/N$である．となりだけにでも勝つ確率は$1/3$[4] であり，2/3の確率で悔しい思いをすることになる．おおお，式で書けているではないか．しかもこの確率はかなりおおきいぞ．

---

[2]しかも，質問が「違いを述べよ」であったので，バカバカしい問題であったような気もする．むしろ，似ている点とか相違点を聞くべきであったか．

[3]理論体系とはカッコよい言い方であるが，むしろがんじがらめに (繊細に折り重?) なっているとも思える．講義で見たケプラーの法則とニュートンの法則，万有引力の法則の関係のようにどれかだけが勝手に破れたり，変更されたりすることは簡単にはできないように体系立っている．

[4]これには少し悩んだ．最終的には1/3という簡単な式になったが，その導出は順番のついた$1 \sim N$の数字の中から3つを選んでくる場合の数の中で，特別な1つ(自分) が他の2つ(両隣) よりも大きくなる場合の数を計算した．もっと簡単にわかるのだろうか?

ニュートンの法則とは違う結果が観測されたことはない? これは結構微妙な問題だと思う．なぜならば，もしも我々に摩擦力なる概念が無かったとしよう．転がした球はいずれ止まる現実を見て，どう思うだろうか．ある人は「ニュートンの第一法則は間違っている」といい，ある人は「そこには球を止めるべく何かしら不可思議な力が働いておるのじゃ」という．前者はニュートンの法則とは異なる観測だといい，後者はニュートンの運動法則は成り立っていることを主張しているわけだが，どちらが正しいかはこの事実だけでは客観的には判断つかないのではないだろうか?

未来の予測，役に立たない この点を指摘する学生さんが多かった．応用範囲とか予言の強さには違いがあるかなー．役に立たないかどうかはわからない気がする.「雨が止んでしまって」悔しい気持ちになってしまっても,「マーフィーの法則だから」と思って笑い飛ばせれば，精神衛生上はとても役に立っている (と思う).

嫌なことは覚えているだけのこと 大半のマーフィーの法則はこれだけのようだ．最近,「パンを落とすと必ずバターをタップり塗った面が床につく」の法則を力学的に示した論文が雑誌に掲載されたそうだ．健全な部類の法則だが，極めて希であろう.

なんだか，あまり生産的な議論になっていないので，この辺りでこの話題は終わることにする.

問題 3. [**抵抗のある場合の投げ上げ角について**]：講義では，重力下でのボールの放物運動で初速度の大きさを決めたときに，投げ上げる角度が 45 度の時に最も遠くへ飛ぶこと見た．速度に比例する抵抗がある場合はどうなるか?

問題の趣旨：運動方程式を解くところまでは講義でやった．ノートを見ながら，自分でやてみればよい．その後をどうするかがここでの問題である．なんとなく経験的にはわかっていることだが，このモデルかでどこまでいえるのかをみてみよう.

まず，ボールを質量 m の質点と見なして，重力加速度 g による放物運動の運動方程式を解いてみる．鉛直方向を z 軸にとり，水平方向を x 軸のとると粘性抵抗 (粘性係数 κ) がある場合の運動方程式はそれぞれ,

$$m\ddot{z} = -mg - \kappa\dot{z} \implies \ddot{z} = -g - \frac{\kappa}{m}\dot{z} \tag{4}$$

$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x} \implies \ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}\dot{x} \tag{5}$$

これらの式を見て，まず気がつくことは，方程式 (4) で $g = 0$ とすれば式 (5) と同じになるので，式 (4) だけ解いて，$g = 0,\, z \to x$ とすればよい．さて，式 (4) において，z 方向の速度 $v_z = \dot{z}$ を導入すると,

$$\dot{v_z} = -\frac{\kappa}{m}v_z - g \tag{6}$$

と一階微分方程式になる．そこで，求積法で解を求めることが出来る．変数分離の形[5]

$$\frac{\dot{v_z}}{\frac{\kappa}{m}v_z + g} = -1 \tag{7}$$

にして，両辺を時間 $t=0$ から t まで積分，すなわち $\int_{t=0}^{t} dt'$ を作用させる．この時，z 方向の初速度 $v_z(t=0) = v_{z0}$ とする．左辺は，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \int_{t=0}^{t} dt' \frac{\dot{v_z}}{\frac{\kappa}{m}v_z + g} = \int_{v_{z0}}^{v_z(t)} dv_z \frac{1}{\frac{\kappa}{m}v_z + g} = \frac{m}{\kappa}\log\left(\frac{\kappa}{m}v_z + g\right)\Bigg|_{v_{z0}}^{v_z(t)} \\ &= \frac{m}{\kappa}\log\left(\frac{\frac{\kappa}{m}v_z(t) + g}{\frac{\kappa}{m}v_{z0} + g}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

一方，右辺は，

$$\text{右辺} = \int_{t=0}^{t} dt'(-1) = -t \tag{9}$$

となる．よって，$v_z(t)$ について解くと，

$$\frac{\frac{\kappa}{m}v_z(t) + g}{\frac{\kappa}{m}v_{z0} + g} = \exp(-\frac{\kappa}{m}t) \implies v_z(t) = \dot{z}(t) = \frac{m}{\kappa}\left[\left(g + \frac{\kappa}{m}v_{z0}\right)e^{-\frac{\kappa}{m}t} - g\right] \tag{10}$$

を得る．もう一度，z の初期値を 0 として，同様に積分すると，

$$z(t) = \frac{m^2}{\kappa^2}\left(g + \frac{\kappa}{m}v_{z0}\right)\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) - \frac{m}{\kappa}gt \tag{11}$$

となる．x 方向の微分方程式も同様に計算してもよいし，先程述べた変換をしてもよい．

$$x(t) = \frac{m}{\kappa}v_{x0}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) \tag{12}$$

さて，ここまでは講義の復習のような感じであった．この後でどうするかは難しい問題であった (ほんとに)．まずは，式 (11) と (12) から時間 t を消去して，軌道 $z(x)$ を求めてみる．

$$z(x) = \frac{m^2}{\kappa^2}\left[\left(g + \frac{\kappa}{m}v_{z0}\right)\frac{\kappa}{mv_{x0}}x + g\log\left(1 - \frac{\kappa x}{mv_{x0}}\right)\right] \tag{13}$$

初速度の大きさ v_0,($v_{x0} = v_0\cos\theta, v_{z0} = v_0\sin\theta$) を一定として，着地点 $x^*(\theta)$ が最大に

[5]講義では述べなかったが，この変数分離形に帰着できる典型例は同次形

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

である．例えば，$y' = \frac{3xy}{2x^2+y^2} = \frac{3y/x}{2+y^2/x^2}$ である．一見変数分離できないような気がしてしまう．しかし，$u = y/x$ とおくと，

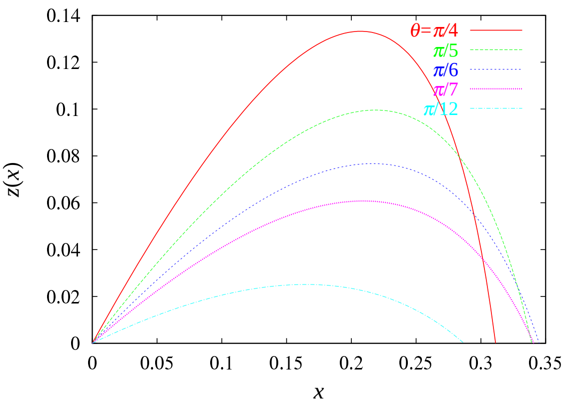
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}\cdot x + u = f(u) \implies \frac{1}{f(u)-u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

となり，これは変数分離形であり，

$$\int du\frac{1}{f(u)-u} = \int dx\frac{1}{x} + C$$

と積分できる．先程の例の微分方程式を解いてみよう．

図 1: 適当な条件での軌跡 $z(x)$ を書いてみる．$\theta = \pi/4$ が最も遠くへ飛ばせるわけではない．



なるような θ を探したいわけである．着地点は，$x \neq 0$ 以外に $z(x) = 0$ を満たす x であるが，その条件式は

$$\left(g + \frac{\kappa v_0 \sin\theta}{m}\right)\frac{\kappa x}{m v_0 \cos\theta} + g \log\left(1 - \frac{\kappa x}{m v_0 \cos\theta}\right) = 0 \tag{14}$$

となるが，これは一般には解けないようである．つまり，着地点は m, v_0, κ 等の様々な条件に依存する[6]．そこで，多く見られたレポートは，$\theta = \pi/4$ と $\theta = \pi/6$ の場合を比較して，ある場合には $\theta = \pi/6$ の方が大きな x^* になることを示していた．すなわち，ある条件下で $x^*(\pi/6) > x^*(\pi/4)$ を示したわけである．よく考えたと思います．なかなか他にエレガントな方法が思い付かなかったので，ここでも似たような戦略をとることにする．とっても悔しい気がするが，式 (14) の解を近似的に解くために粘性係数 κ が小さいとした展開を使う．

$$\left(g + \frac{\kappa v_0 \sin\theta}{m}\right)\frac{\kappa x}{m v_0 \cos\theta} - g\frac{\kappa x}{m v_0 \cos\theta} - \frac{g}{2}\left(\frac{\kappa x}{m v_0 \cos\theta}\right)^2 - \frac{g}{3}\left(\frac{\kappa x}{m v_0 \cos\theta}\right)^3 + O(\kappa^4) = 0 \tag{15}$$

これを $x \neq 0$ として，解くと，

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{2}{g}v_0^2 \sin\theta\cos\theta - \frac{2}{3}\frac{\kappa x^2}{m v_0 \cos\theta} + O(\kappa^3) \\ &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta - \frac{2}{3}\frac{\kappa}{m v_0 \cos\theta}\left(\frac{2}{g}v_0^2 \sin\theta\cos\theta\right)^2 + O(\kappa^3) \\ &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta - \frac{8}{3g^2}\frac{\kappa v_0^3}{m}\sin^2\theta\cos\theta + O(\kappa^3) \end{aligned} \tag{16}$$

ここで，$x(\theta)$ の $\theta = \pi/4$ での微係数を調べてみると，

$$\begin{aligned} \frac{dx(\theta = \pi/4)}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\theta - \frac{8}{3g^2}\frac{\kappa v_0^3}{m}(2\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\Big|_{\theta=\pi/4} \\ &= -\frac{8}{3g^2}\frac{\kappa v_0^3}{m}\frac{1}{2\sqrt{2}} < 0 \end{aligned} \tag{17}$$

---

[6]だからといって，答えがないわけではない．条件の設定を行えばある着地点およびそれが最大になる投げ上げ角度 θ は決まる (はず)．

となり，$\kappa > 0$ であれば常に負になっている．つまり，条件に依らずに，着地点 $x^*(\theta)$ は $\kappa > 0$ のときには $\theta = \pi/4$ が最大になっておらず，むしろ最大角は $\theta < \pi/4$ であることを意味している．極値としての条件は簡単にでそうだな．
レポートの中には，投げ上げ角度と着地角度が満たすべき不思議な関係式を導いているものがあった．これが何を意味するかはよくわからないが，そこから何か条件が決まるかもしれない．

問題 4. [**減衰振動について**]：速度に比例する抵抗のあるばね振動の運動方程式は，

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \mu\frac{d}{dt}x + \omega^2 x = 0 \tag{18}$$

となる．この振る舞いを議論せよ．

問題の趣旨：2 階の線形微分方程式を解いてみようということです．問 3 の問題では求積法を使って解くこともできたので，ここでは講義で紹介した特性方程式を使う応用問題ということです．この中には講義で説明していないことも出てきました．

一般に $f(t)$, $g(t)$ を任意の関数として，微分方程式

$$\ddot{x} + f(t)\dot{x} + g(t)x = 0 \tag{19}$$

を 2 階線形微分方程式 (特に右辺の定数項が無い場合は斉次形) という．この微分方程式の解の構造は線形性より次のような性質をもつ．

> $x_1(t)$，$x_2(t)$ を微分方程式 (19) の解とするときに，任意の定数 C_1，C_2 に対して，
>
> $$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \tag{20}$$
>
> は (19) の解である．確かめてみよう．
>
> この解 $x_1(t)$，$x_2(t)$ が一次独立[7]のときに，$x(t)$ は一般解である．

さて，どのように一次独立な $x_1(t)$，$x_2(t)$ を求めるかは状況によって異なる．問題のような場合は，$f(t)$, $g(t)$ が t に依存しない定数である．このときは，$x(t) = e^{\lambda t}$ を解の候補[8]と考える．このときに，$x(t)$ が微分方程式の解になるための必要十分条件は，

$$\lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0 \tag{22}$$

[7]定数 C_1，C_2 に対して，

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = 0 \tag{21}$$

が成り立つのが，$C_1 = C_2 = 0$ の場合に限られるときに，$x_1(t)$,$x_2(t)$ は一次独立であるといい，そうでないときに，一次従属という．

[8]ここに違和感を持っている人が沢山いるようだ．とても天下り的だとか，これで解は尽きているか等の疑問が沸いて来る．前者に対してはなんとも返答がない．方程式を満たしていれば方程式の解はなので，何かしらそんな関数を見つけたいわけである．その意味で指数関数は微分しても，また自分自身に戻って来る関数である．線形微分方程式にはもってこいの関数だと思えないか？後者の疑問に対しては，場合場合でチェックしてみるしかない．要点は 2 階微分方程式では一次独立な 2 つの基本解が必要だということ．

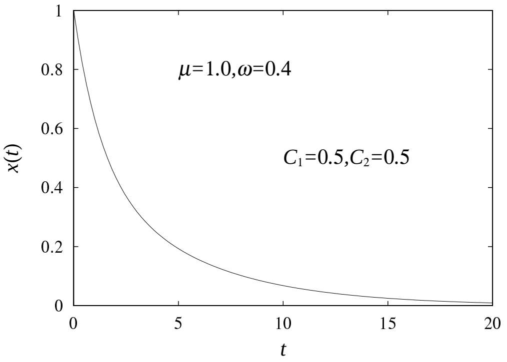


図 2: (i) の場合: 振動系の問題なのに振動しないのはなぜかという質問があったが，ここではとても摩擦が大きい状況に相当している．

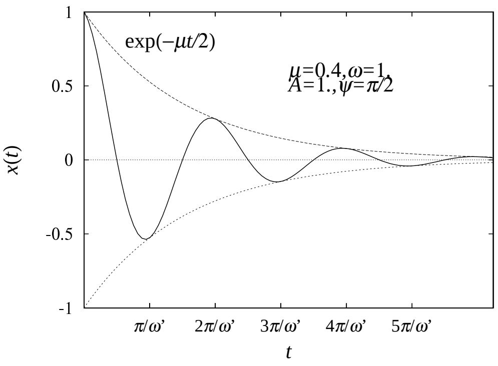


図 3: (ii) の場合:振動の周期がよくわかるように横軸のスケールを書いておく必要がある．たまに周期がどんどん早くなっているようなグラフがあった．振幅が減衰するので，周期が早くなるような感じがするかもしれないが，それは誤解である．周期はいつでも一定.

である．この 2 次方程式は特性方程式という．一般解はその根の性質で分類される．

(i)$\mu^2 - 4\omega^2 > 0$　このとき特性方程式は，相異なる 2 つの**負根** $-\alpha,\ -\beta(\alpha > 0, \beta > 0)$ をもつ．一般解は,

$$x(t) = C_1 \exp(-\alpha t) + C_2 \exp(-\beta t) \tag{23}$$

であり，特性方程式の根はそれぞれ

$$\alpha = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \qquad \beta = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \tag{24}$$

となる．どちらも負であることから，$x(t)$ は単調に減少する関数になる[9].

(ii) $\mu^2 - 4\omega^2 < 0$　特性方程式の根は虚数 $-\mu/2 \pm i\omega'$ になるから，一般解は,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\mu/2t}\left(C_1 \exp(i\omega' t) + C_2 \exp(-i\omega' t)\right) \\ x(t) &= e^{-\mu/2t}\left((C_1 + C_2)\cos(\omega' t) + i(C_1 - C_2)\sin(\omega' t)\right) \\ &= A e^{-\mu t/2} \sin(\omega' t + \psi) \end{aligned} \tag{25}$$

である．ここで，$\omega' = \sqrt{4\omega^2 - \mu^2}/2$ であり，A, ψ は C_1,C_2 から決まる定数である．このような運動は減衰振動と呼ばれている．単振動と比べると，振幅は指数関数的 $\exp(-\mu t/2)$ に減少し，角振動数が ω から ω' に減っている．減衰するのは振幅であって，角振動数あるいは周期ではないことに注意しよう．

[9]たびたび見掛けた解答に「非周期的運動」とか「振動しない」とかがあった．これは説明になっていないのではないかなー．振動しない，非周期的運動ってとても沢山ある．単調減少であることを示すには，α, β が共に負であることを明示する必要がある．そうでないと，発散する可能性もある．一度はグラフで示してみるといろいろとわかる．

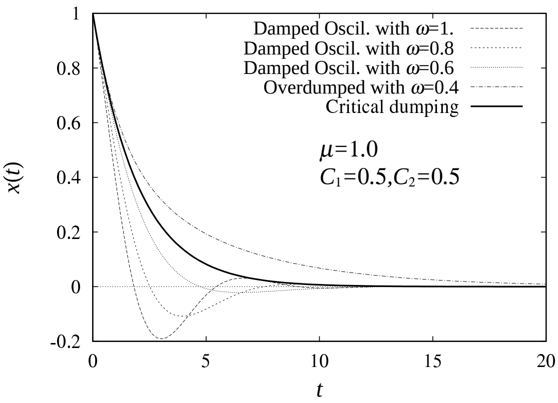


図 4: (iii) の場合: ちょうど，(i) と (ii) の境目なので,「臨界」と呼ばれているのだろう．グラフには $\mu = 1$ として，ω を変えて書いてみた．ω を減らして振動運動しなくなるところがこの臨界減衰である．

(iii) $\mu^2 - 4\omega^2 = 0$　これは特性方程式が重根を持つときで，講義では省略したところである．一つの基本解は，$x_1(t) = \exp(-\mu t/2)$ であるが，このままでは一次独立な 2 つの関数が得られていない．そこで，$x(t) = A(t)\exp(\lambda t)$ とおいて，改めて微分方程式に代入して，$A(t)$ の満たすべき条件を考えてみる．元々の特性方程式も考慮すると，条件は $\ddot{A} + (2\lambda + \mu)\dot{A} = 0$ となるが，$A(t) = t$ はその条件を満たす．結果として，もう一つの基本解は $x_2(t) = t\exp(-\mu t/2)$ となることがわかる．一般解は,

$$x(t) = e^{-\mu t/2}(C_1 + C_2 t) \tag{26}$$

となる．この運動は臨界減衰と呼ばれている (らしいことをレポートで知った）.

問題 5. [**講義について**]：あなたは大学の講義に何を期待しているか? (例えば，最先端の科学技術が知りたいとか，基本的な科学知識を得たいとか....) それから，この講義の感想，意見を教えて.

この質問の動機は，私の他大学の友人との話の中で疑問から始まった全く個人的な動機であった．彼の担当している講義の学生はどうやらとても保守的で，常に一番を目指しているのではなくて，自分をほどよい居場所を探している大人な集団なんだそうだ.「これは普遍的なのか?」というのが疑問であった．しかしながら，この問いにこれくらいのアンケートでわかるかどうか，そもそも疑問であったし，そんなこととは別に，私としてはみなさんが何を考えているのか知りたいという単純な動機であった． 個別にはそれなりにコメントを返したつもりなので，共通するようなことがらを書いてみる.

実用的が知りたい 物理の講義としてのコメントであったが，高校の物理がとても非現実的だったので，そうでない状況を知りたいということ．より現実的な問題，野球の変化球とかの例もあった．少しくらいはその方向に行けるよう努力してみることにする.

絶対に身に着けておかなくてはならないこと それはなんだろうか? よくわからない．私の場合

は応用等の工学よりも理学的な基本の方に興味があった[10]．その部類の人には，無尽蔵の体力と好奇心 (面白いと感じる心) かな．

偏りのない知識，幅広い知識 ... 自分が学生のころならば，こんな感じの答えだっただろうと思う．ある意味で受身の塊とも思える．知的好奇心は抑えようがないし，いろいろ勉強することはよいことだろう．そんなに悪いことではないと思う．しかし,「知識は有限でも，想像力は無限だ」と誰かの言葉が脳裏をかすめる．所詮，どんなにがんばっても脳味噌に蓄えきれる情報・知識には限りがある．同時に，想像力も鍛えないと無限にはならない．考える訓練を積極的に行うことを勧めたい．

最先端の話 質問で誘導してしまったこともあるが，これも自然な要望であると思う．なかなか,「力学」の枠内でその要望に答えるのは難しい．

最先端のことを知りたいという欲求はそれに至るための知識獲得の強い動機になるし，いつでもそちらへアンテナは張っておくべきだが，必ずしも最先端のことにのみ面白いことがあるわけではない．考えてみれば，自分の知識の外側 (知らないことがら) と最先端のことにどれくらいの違いがあるだろうか? 「最先端」ということだけに価値観を見出すのでなくて，是非,「面白い」と思えることをどんどん学んで欲しいと思う．この点は何だか消極的に聞こえるかも知れないが，経験的にはどの方向に歩いていても，すぐに人類のだれもまだ知らないという意味での最先端に行き着くことが多い．それが価値のある最先端かどうかは，教養学部の段階で判断する必要はないのではないだろうか．

この講義について ：少なくない御意見を頂いたが，レポートを返してしまったので覚えていない．気づいた点は WEB 上で解答することにします．

1. 「ミスが多い.」まず，ミスはよくないことは重々承知しているという前提で話をしたい．特に，新しい概念が出てきたときは，ノートを見たときに困惑してしまうだろう．今後は出来る限り注意します．ただし，簡単なケアレスミスは逆に教育効果もあるとも思っています．ただ完全なるノートを眺めているより，ミスを発見することで理解が深まったりするのではないでしょうか?そこでのじっくり考えたり，困惑した時間は決して消耗な時間ではないと思います．講義でくりかえしたとおり，これからは目の前にあるもの (教官，本，論文等) がいつでも全て正しいとは思わない方がよい．講義と授業の違いに関係していることかもしれませんが，少々の疑いを持って話を聞くことは大事です．頭から疑わないということは自分の思考を止めていることとほとんど変わりません．
2. 「どこまでが覚えることで，どこからが覚えなくてもよいことか不明」これは難しい疑問．

全体として，まとまらない話になってしまった．それこそ「実用的でない」役にたたんことばかりか...

[10]よく理系の人種は，子供の頃に「ラジオを作る」派と「星空を眺める」派に大きく分けられるそうだ．私は後者だったし，人からもそっち派だと言われたことがある．