

問題 1. [力とポテンシャルについて]:

1. 万有引力は、原点を基準としたポテンシャル・エネルギー  $U(x, y, z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  で表される。このときの力  $F$  の各成分を求めよ。
2. 講義で、力が保存力であることと、 $\nabla \times F = 0$  であることに触れた。上で求めた力  $F$  はこれを満たしていることをチェックせよ。
3. バネに働く力  $F = -kx$  は保存力である。そのポテンシャル・エネルギー  $U(x)$  を求めよ。

問題の趣旨：ポテンシャルに関する例題である。新しい概念なので、例題を通じて理解を深めることと、偏微分の練習を兼ねている。

1. ポテンシャルが与えられたときに力は  $F = -\nabla U$  で求めることができる。

$$\mathbf{F} = -\nabla U = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) U \quad (1)$$

特にその  $x$  成分  $F_x$  は、

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{k(-1/2)(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{-kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2)$$

なので、 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  とおいて、力ベクトル  $F$  は、

$$\mathbf{F} = \left( \frac{-kx}{r^3}, \frac{-ky}{r^3}, \frac{-kz}{r^3} \right) = -k \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \quad (3)$$

となる。ここで、 $r$  は大きさ 1 の位置ベクトル  $\mathbf{r} = (x/r, y/r, z/r)$  である。力  $F$  の大きさが  $r^{-2}$  になることがわかるだろうか。

問題文の「「原点を基準とした」という言い方は正しいのか」との指摘を頂いた。なぜ自分でもこんな言い方をしたのか不明である。ポテンシャルはその基準点をどこに選んでもよい自由度をもっている。原理的にどこでもよいわけであるが、このポテンシャルは原点で発散しているのだから、あまりにもすわりが悪い。通常この手のポテンシャルは無限遠を基準にとることが多い。

2. これも偏微分の練習である。

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left( \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y, \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z, \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \right) \quad (4)$$

そもそも力がポテンシャルを使って表せることがわかると、一般的に

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{F})_x &\equiv \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial}{\partial z} U \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial}{\partial y} U \right) \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) U = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となることがわかる。しかし、ここでは偏微分をやってみようということなので、 $x$  成分に出てくる偏微分項を計算してみると、

$$\frac{\partial}{\partial y} F_z = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-kz}{r^3} \right) = \frac{3kyz}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z} F_y = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{-ky}{r^3} \right) = \frac{3kyz}{r^5} \quad (6)$$

となり、やはりゼロになることがわかる。ポテンシャルで書ける力はその仕事が始点と終点のみにしか依存しないことが示せる。ここでは、その場合に  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ <sup>1</sup> となることを示した。逆はどうかというのは当然の疑問である。つまり、 $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  ならば、その力  $\mathbf{F}$  は保存力であるか。答えは Yes である。詳細はベクトル解析か、冬学期の電磁気学で学ぶことになると思う<sup>2</sup>。

3. 力から逆にポテンシャルを求めてみよう。しかし、ここは一次元の問題になってしまった。今、ばねは一次元方向にしか動かないとする。力は  $\mathbf{F} = (-kx, 0, 0)$  なので、原点を基準として<sup>3</sup>、ポテンシャル  $U$  は

$$U = - \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\text{経路}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = - \int_0^x (-kx') dx' = \frac{kx^2}{2}$$

となる。

<sup>1</sup>左辺はベクトルなので、右辺の  $0$  もスカラーではなくて、 $(0,0,0)$  なるベクトルである。我々のルールではそれは太字で  $\mathbf{0}$  と書くことになる。フォントのせいでナブラ  $\nabla$  は太字に見えないかも知れないが、これはベクトルなので太字である。

<sup>2</sup>さわりだけを説明すると、保存力であることはある閉曲線  $C$  に沿って仕事を積分したときにゼロになることと同じである。

$$\int_{\text{閉曲線 } C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

一方で、閉曲線  $C$  で囲まれた面  $S$  について、面積要素の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  として、

$$\int_{\text{閉曲線 } C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{面 } S \text{ での面積分}} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dS_n$$

が成り立つことが一般的に示せる (ストークスの定理)。  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  ならば、左辺が  $0$ 、すなわち保存力であることがわかる。

<sup>3</sup>ここは問題ない。きっと、本当はここに 1. ではなくてここに書きたかった?

問題2. [ぶらんこの続き]: ある日, 公園に2つのぶらんこを見つけて, 子供と二人でそれぞれぶらんこに乗った. 同じ高さから同時に揺らし始めて, その後は一切「こぐ」ことはしなかった. 最初は同じ位相で揺れていたが, しばらくすると位相はずれ始めた.

1. この事実は, 講義で解説した振り子の方程式では決して説明できない. 例えば, 講義では微小振動に限った場合を扱ったが, そうでなくてもやはり説明できない. この理由を述べよ.
2. 二人のうち, どちらの周期か早くなったかを議論せよ.

ヒント: 適当なモデルをつくってみる. 二人の違いは質量の違いではないとして, 振り子の問題でモデル化をし (ここまでは講義でやった), 例えば, ... 抵抗力を考慮して方程式を解いてみるか? 速度に比例する粘性抵抗を考慮する方が簡単. 速度の2乗に比例する慣性抵抗の場合は解くのが難しい. でも, 方程式を解かないで答えは見つけられるかな?

問題の趣旨: 少し考えてみようということでした. ちょっとヒントを出しすぎで, みなさんそれに引っ張られてしまったようです. いろいろな可能性があると思うので, もっといろいろ考えてみるといいでしょう.

1. ちょっと乱暴な質問でしたが, 単純に質量の違いでは答えられないこと, 振り子の方程式ではダメなことを理解しているか聞いています. 振り子のヒモの長さ  $l$  が変化しない時の, 振り子の回転方向の運動方程式は, 鉛直方向から見て角度  $\theta$ , 質量を  $M$  として,

$$Ml\ddot{\theta} = -Mg \sin \theta \implies \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

これは質量に依存しない方程式なので, どうやっても「私」と「子供」の違いは出てこない. 実際に解くときに  $\theta \ll 1$  という微小振動である近似をしたが, 方程式が同じなので運動も同じなので, 近似とは全く関係ない.

- ただし, 子供と大人の違いは質量だけでなく, 重心の位置がちがうと考えることもできる. 周期は  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  なので, 大人の方が重心が高い. つまり振り子の実効的な長さは短くなる. 結果として, 大人の方が周期が短い. これは振り子の方程式で二人の違いが出ている. 二人とも座っていて, ぶらんこの長さが長いとその効果は小さいであろう.
  - そもそも理想的な振り子には摩擦もないし, 空気抵抗も考えてないし ... 鎖の重さも ... 当たり前かも知れないが, なぜ「理想的な振り子」ではダメなのかはきちんと指摘しておくべきであろう. ある (自然) 現象をモデルかしようとしたときに, モデルに欠けることはあげればキリがないことがほとんどである. 人間の無知さ・無力さを目の当りにしながら, それでも欠くことのできない本質的な事柄はなんであるかを考えるのが物理である (というのはちょっと過言か?). 欠けていることよりも取りこぼせないことが大事なのだ.
2. さて, そこで何かしら変更したいわけだが, ヒントで出したのは, 粘性抵抗をいれてみたらどうなるかということであった. 回転方向の速さは  $v_\theta = l\dot{\theta}$  と表される

ことに注意をすれば，運動方程式は，

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{l\kappa}{M} \dot{\theta} \implies \ddot{\theta} + \frac{l\kappa}{M} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (7)$$

となる．ここで， $\kappa$  を粘性係数とした．この微分方程式は微小振動 ( $\sin \theta \sim \theta$ ) の時に，前回のレポートでも解いた減衰振動の運動方程式と同じである．粘性係数の大きさの考え方で，私は混乱して，ちょっとレポートに依存したコメントをしてしまった．(i) 粘性抵抗は非常に小さい ( $\kappa \ll 1$ ) と考えるのか，(ii) ブランコは振動するのだから減衰振動になる  $\kappa$  の大きさの場合を考えればいいのか．(i) はパラメータの設定から現象が減衰振動であることを導き出していると考えのに対して，(ii) ではまず現象があってそれに対応するパラメータを選べばよいという立場だと思える．どちらでもいいような気がしてきた．減衰振動の解は，任意の定数  $A, \phi$  として，

$$\theta(t) = A \exp\left(-\frac{l\kappa}{2M}t\right) \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

となる．ここで，角振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{l\kappa}{2M}\right)^2} \quad (9)$$

となる．初期条件は同じなので， $A$  と  $\phi$  は同じである．位相  $\phi$  だけがずれることは考えにくいので，周期(角振動数)がずれたわけである．実際に方程式の解から，角振動数は質量の大きな方が早く，周期が短い．つまり「私」と「子供」を比較すると「私」の方が周期が短いということになる．

- たまに「位相が短くなる」という解答があったが，位相は遅くなれるが，短くなるとはいえないだろう．位相と周期の違いをよく考えてみよう．
- ここでの解析は粘性抵抗の考察であった．これと，先の重心が違う説はどちらが最も正しいだろうか．それぞれの予言を比較すると．どちらも「私」の周期が短いことを結論付けている．抵抗の方は，さらに減衰の仕方も結果を与えている．それは式(8)から，減衰は「子供」の方が早く，減少の特徴的な時間は  $\tau = 2M/(l\kappa)$  となり，質量に比例している．これは検証できるであろう．実際にどうであったかは記憶にない．近いうちに試してみたいが，検証の結果「子供」の周期が短いということもあるかもしれない．そうであれば，最初から考え直しである．
- 実際に，弟をつれて実験を試みた学生がいた．それによれば，位相差は生じないということであった．とてもよくできたブランコか，あるいは振動の回数が多くなかったか ...
- 他の可能性もいろいろあるはずである．粘性抵抗よりも慣性抵抗の方がより効くであろうし，軸受の摩擦の効果もあるであろう．
- 答えがよくわからない問題を考えるのは面白い．これは最先端の研究も同じである．