

第1回統計熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 15 年 11 月 28 日: ver. 1.0

問題 1 「古典調和振動子系のカノニカル分布での取り扱い」:

N 個の相互作用しない質量 m , 角振動数 ω の調和振動子系がある. 各振動子は 1 つの振動自由度しか持っていないとする¹. ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}(\{x_i\}, \{p_i\}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_i^2 \right) \quad (1)$$

1. 分配関数 $Z(T)$ を温度 T の関数として求め, 内部エネルギー (エネルギーの期待値), 比熱, エントロピーを温度 T の関数で導き, グラフで概略を示せ.
2. エネルギー等分配則を導け. すなわち,

$$\left\langle \frac{p_i^2}{2m} \right\rangle = \text{これこれ} \quad (2)$$

$$\left\langle \frac{m\omega^2 x_i^2}{2} \right\rangle = \text{これこれ} \quad (3)$$

を調べよ.

3. (ちょっと難しい). ハミルトニアンに非調和項 $V(\{x_i\})$,

$$V(\{x_i\}) = C_1 x_i^3 + C_2 x_i^4 \quad (4)$$

を加えたときに, 比熱に対する非調和項の補正²を温度 T に比例する項まで調べよ.

✂切は 12 月 12 日とする.

¹一次元格子状に並んだ振動子系で, 縦波しか無い状況を考える.

²係数 C_1, C_2 を小さいとして扱ってよいとする.

問題 2 「3 状態模型 + α 」:

N 個の格子点に値が μm ($m = -1, 0, 1$) をとる磁気モーメントがある。この系に磁場 H をかけたときのハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}(\{m_i\}) = -\mu H \sum_{i=1}^N m_i \quad (5)$$

で与えられているとする。

1. この系の温度 T での分配関数 $Z(T)$ を求め、内部エネルギー (エネルギーの期待値)、比熱を温度 T の関数で導き、グラフで概略を示せ。
2. また平均磁化 $M = \langle \sum_i m_i \rangle$ を H の関数として求め、概略を示せ。何が起きているかを説明せよ。
3. 帯磁率 $\chi_0 = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_{H=0}$ を求め、温度変化の概略を示せ。
4. (ちょっと難しい)。各磁気モーメントが一般的の磁気量子数 $m_i = -J, -J+1, \dots, J-1, J$ と $2J+1$ とおりの値をとるときに、同様な解析を行い、比較してみよう。

レポート提出に際して

ルール:

1. A4 レポート用紙で作成し、枚数制限はしないが、片面にのみ記載されていること。
2. レポートは共同作業でも行ってもよい。講義で分らなかったことを話をしたりするのは大変有意義なことなので、レポートもその範疇に入ると考える。レポートは試験では無いのだから、何も一人ぼっちで悩むことはない。沢山議論した結果を個人個人でうまくまとめて欲しい。レポートの解答まで共同作業では困る。
3. レポートの冒頭に氏名と学籍番号、それからレポート作成の時に一緒に悩んだ共同研究者名を明記のこと。
4. 提出先は、16 号館 221A 室、あるいは講義終了時に。
5. レポート問題の返却: 赤を入れて返します。

どちらか一問だけでもよいとする。どっちも解いてみてもよいとする。