計算ノート (力学 (金))
福島孝治 (東京大学院総合文化)
2004 年 4 月 23 日: ver. 1.0

- not so Frequently Asked Questions -

ある時刻 t での位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ と速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$ から，時刻 $t+\Delta t$ での位置ベクトルは，

$$\boldsymbol{r}(t+\Delta t) = \boldsymbol{r}(t) + \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{1}$$

と書ける．

1. (a) $O(\Delta t - 2)$って何?
2. (b) そもそもこの式はどこからやってきた?

(a) は，大きさが δt^2(とそれよりも高次を含む) 項をざっくり表している．読み方は，オーダー (order) である．これは，Δt は小さいとしたときに，Δt の１次式のレベルで等式が成り立っていることを表したい時に用いられる．そういう意味での近似ということだが，近似だと「=」を使うことは数学的にはできないから，残りの部分を記号 O の中に全て押し込んでいると考えている．具体的な例は次にみることにしよう．

注意したいことは，左辺はベクトルなので，当然右辺もベクトルである．その意味で，ここでは O の中にベクトルである要素も含めてしまっている．普通はこんな書き方はしないので，ちょっとまずい気がする．

(b) 具体的に式 (1) を求めてみることにする．簡単のためにスカラー関数 $f(x)$ の $x = x_0$ 近傍の場合の展開式,

$$f(x_0+\epsilon) = f(x_0) + \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}\epsilon + \cdots$$

の出処について考える[1]．ある x の区間について，一般に関数 $f(x)$ が $(x-x_0)$ の多項式で書けるとする．

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \tag{2}$$

ここで，逐次的に $x-x_0$ の n 次の係数 a_n を求めることを考える．

1. $x = x_0$ と置くことで，$f(x_0) = a_0$
2. 一回微分してから $x = x_0, \longrightarrow \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0} = f'(x_0) = a_1$
3. 同様に n 回微分してから $x = x_0, \longrightarrow \left.\frac{d^n}{dx^n}f(x)\right|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0) = n!a_n$

   これから $\Longrightarrow f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots = \sum_m^\infty \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$ とかける．

[1] ここで，右辺第二項の $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}$ は $f(x)$ を x で微分をとった後に $x = x_0$ を代入することを意味している．つまり，$x = x_0$ での関数 $f(x)$ の微係数のことである．簡単に $f'(x_0)$ と書くこともある．

$x - x_0 \ll 1$ のとき

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

を関数 $f(x)$ の $(x - x_0)^2$ のオーダーでの近似という．これを上の記号 O を使って，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + O\left((x - x_0)^3\right)$$

と表す． 特に $x_0 = 0$ の近傍での関数の近似の例を示す．

1. $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! +$
2. $\exp(ix) = 1 + (ix) + (ix)^2/2 + (ix)^3/3! + \cdots = (1 - x^2/2 + x^4/4! + \cdots) + i(x - x^3/3! + \cdots)$
3. $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! + \cdots$
4. $\sin(x) = x - x^3/3! + \cdots$

これらの式が正しいかどうかを示してみよう．

また，電卓を叩いて，近似の各オーダーでどの程度数値的に合っているかを確かめてみるのはいいかもしれない．

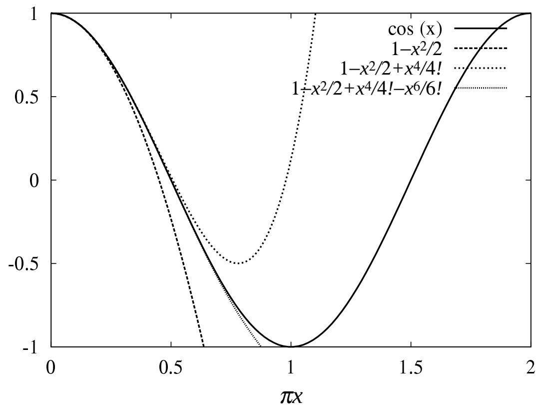

図 1: $f(x) = cos(x)$ の場合の例を元の関数と 3 次の多項式で表した場合の式をグラフに描いてみる．

ベクトル$\boldsymbol{A}$の二乗とは? $\boldsymbol{A}^2$ はベクトルかスカラーか?

ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の大きさを議論するときに，恒等式

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \tag{3}$$

の中にいろいろな二乗がでてきたが，これはどういう量かというのが質問であった．まず，右辺第二項は内積の二乗なので，これはただのスカラー量の二乗なので，すでに既知である．左辺や右辺第一項に現れるのは，

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$$

という意味である．これで疑問は解消されたであろう．また，$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ と xyz 空間の成分で表したときに，両辺の各成分を比較することで，恒等式が成り立っていることがわかる．やってみよう．また，もう少し一般的な恒等式として，4 つのベクトルについて，

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$$

が成り立つ．

第一回物理学 A レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 16 年 4 月 23 日: ver. 1.1

問題 1 「ベクトル演算 1」:

1. 任意の (3 次元空間での) ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対して，次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

2. $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ を辺とする平向 6 面体の体積は，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ で表されることを示せ.

問題 2 「ベクトル演算 2」: 時間 t の関数であるベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ について以下の問に答えよ.

1. 数学的な恒等式

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

   を示せ.

2. (ちょっと難しいか？) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルだと思うと，この式は $\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ が時間的に変化しない条件を与えている．その条件を満たす力とはどのような性質を持っているか，議論せよ.

問題 3 「過去問から」 どちらか一つでもよいことにする.

1. 重力加速度の値を測定する方法を提案せよ.
2. 力が伸びに比例するバネがある．つまり，伸びベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると，($\boldsymbol{F}\propto-\boldsymbol{x}$) となる．この比例係数 (バネ定数) を測定する方法を提案せよ.

問題 4 「講義について」: 講義に関する感想・意見・要望はないか?この講義に期待していることは何か？[2]

レポート提出に際して

ルール:

[2]後者は，このシリーズの最終回にお願いすることになるであろう「授業評価アンケート」に関連した疑問です．そのアンケートの一つに「講義への満足度」があります．アンケート施行から数年経つようですが,「年々学生の満足度指数が向上してきて，大変良い傾向だ」との評価がされているようです．講義のシリーズの早い段階に，**何をもってして**満足するのかを明らかにしておきたいわけです．ご要望に答えられるかどうかは保証できませんが，その反応はアンケートの時にバッチリ指摘してください.

1. A4 レポート用紙で作成し，枚数制限はしないが，片面にのみ記載されていること．
2. レポートの冒頭に**氏名**と**学籍番号**，それからレポート作成の時に一緒に悩んだ**共同研究者名**を明記のこと．
3. **締め切りは 1 週間後**
4. 提出先は，16 号館 221A 室，あるいは次回の講義終了時に．

レポート問題の返却： 赤を入れて返します．

レポートは共同作業でもいいのかな... よい．普段から友人と議論して，講義で分らなかったことを話をしたりするのは大変有意義なことなので，レポートもその範疇に入ると考える．レポートは試験では無いのだから，何も一人ぼっちで悩むことはない．沢山議論した結果を個人個人でうまくまとめて欲しい．レポートの解答まで共同作業では困る．ましてや，レポ対作成解答例を移してもあんまり「得」はないと心得よ．総合評価に対するレポートの比率はかなり低いので，そのことを考えると,「悩むことなく作成されたレポート」などほとんど何の役にも立たない．むしろ，紙の無駄，作成する時間や採点する時間の無駄であり，お互いの不幸しかもたらさない．

レポートは手紙と同じ と思って，提出する時には自分でよく読み直して，意味が通っているかよく確認して欲しい．他人が読むとすぐに混乱するようなレポートは困る．また，ありがちな混乱の原因として，

1. 式変形
$$f(x) = \int dx g(x, x') \tag{4}$$
のように x で積分しているのに，左辺が x の関数になっていたり，右辺は x' の関数なのに，左辺はそうでないなどの間違いは，読み返すとそのおかしいところにすぐに気づくはず．
2. ベクトル=スカラー??? 計算の途中で**ベクトル**=スカラーという変形がたびたび見受けられる．例えば,
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = G\frac{Mm}{x^2} \tag{5}$$
等である。これはあり得ないので、よくチェックするように。慣例的にベクトルは太字 $\boldsymbol{F}$ で、スカラーは普通に F と書くことが多い。

「式で表すこと」と「絵で描いてみること」中学生にもわかるように説明するには絵で描いてみせることが大事で、本当に理解できていると、式など使わずに絵で描けるはず。一方で、だれにも正確に情報を伝えるには数学で記述する必要がある。どちらも、大事だということ。レポート問題でも出てきた結果は一度はグラフや絵に描いてみるともっとよくわかることがある。