計算ノート (力学 (金))
福島孝治 (東京大学院総合文化)
2004 年 5 月 7 日: ver. 1.0

3-2. 常微分方程式のいくつかの解き方+おまけ

1. 求積法 ： 一階常微分方程式

   一般に x の関数 y とその導関数 $y' = \frac{d}{dx}y$ の間に成り立つ式

$$F(x, y, y') = 0$$

   を一階常微分方程式という．以下にこの微分方程式を積分によって求める方法を示す.

   (a) **変数分離法**： $\frac{d}{dx}y = f(x)g(y)$

   両辺を $g(y)$ で割り，x に関する積分をすると，

$$\int dx \frac{1}{g(y)} \frac{d}{dx} y = \int dy \frac{1}{g(y)} = \int dx f(x) + C$$

   となる．ここで，C は積分定数となり，初期条件によって決定される.

   例 $\frac{d}{dx}y = (1-2x)y^2$, $y \neq 0$[a]

   変数分離法により，

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2} &= \int dx(1-2x) + C \\ -\frac{1}{y} &= x - x^2 + C \\ y &= -\frac{1}{x-x^2} + C \end{aligned}$$

   (b) **同次形**： $\frac{d}{dx}y = f(y/x)$

   これは，$u = y/x$ と置くことにより変数分離形になる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y &= \frac{d}{dx}(ux) = \frac{d}{dx}ux + u \\ x\frac{d}{dx}u + u = f(u) &\Longrightarrow \int \frac{1}{f(u)-u} du = \int \frac{1}{x} dx + C \end{aligned}$$

   例 ： $\frac{d}{dx}y = \frac{3xy}{2x^2+y^2} = \frac{3y/x}{2+y^2/x^2}$

   答え：$y^4 = C(x^2-y^2)^3$ （C は積分定数)

[a] 講義で板書した例題と答えが間違っていた．板書での問題は，$\frac{d}{dx}y = (1-2x^2)y$ であった．この場合も変数分離形である．答えを求めてみよう.

2. 線形微分方程式

一階の常微分方程式の中で特に関数 y とその導関数 y' についての一次しか含まない微分方程式を線形微分方程式という．一般的に,

$$\frac{d}{dx}y + P(x)y = Q(x)$$

のような形にまとめることができる．

(a) **線形方程式**
両辺に $e^{\int P dx}$ をかけると,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}y\right)e^{\int P dx} + Pye^{\int P dx} &= \frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right) = Qe^{\int P dx} \\ &\downarrow \quad x \text{ で積分すると} \\ ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx}dx + C &\Longrightarrow \boxed{y = e^{-\int P dx}\left(\int Qe^{\int P dx}dx + C\right)}\end{aligned}$$

例 1： $\frac{d}{dx}y + y = x^2$
公式に当てはめてみると,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int dx}\left(\int x^2 e^{\int dx}dx + C\right) \\ &= e^{-x}\left(\int x^2 e^x dx + C\right) = e^{-x}\left((x^2 - 2x + 2)e^x + C\right)\end{aligned}$$

例 2： $\frac{d}{dx}y + ay = b\cos(cx)$ a, b, c は定数

やってみよう

(b) **ベルヌーイ形** $\frac{d}{dx}y + P(x)y = Q(x)y^n$，ただし $n \neq 0, 1$.

これは，$z = y^{1-n}$ とおけば，線形微分方程式に変形できる．　示してみよう．

3. 定数係数線形微分方程式の解法

高階の導関数を含む線形微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + a_1\frac{d}{dx}y + a_2 y = f(x)$$

で[b]，左辺の係数 a_1, a_2 が定数の場合を考える．特に，右辺の $f(x)$ が 0 の場合を斉次方程式と呼ばれている．まず，$f(x) \neq 0$ の非斉次方程式の場合の問題が斉次方程式の問題に変形できることをみる．

[b]講義の板書で a_2 の項の y を抜かしてしまっていた．

(a) 特解をみつけると...

ある一つの特別な解 (特殊解)y_0 を見付けたとする．具体的な見付け方は後述する．$f(x)=0$ とした斉次方程式の解を y_1 とすると，$y=y_1+y_0$ は微分方程式の解である．実際に代入してみると，

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1+a_1\frac{d}{dx}y_1+a_2y_1\right)+\left(\frac{d^2}{dx^2}y_0+a_1\frac{d}{dx}y_0+a_2y_0\right)=f(x)$$

となることがわかる．非斉次方程式は特解を見付けることで，斉次方程式の問題に帰着できることがわかった．

(b) 斉次方程式の解

それではこの斉次方程式を解くことにする．まず，$y=e^{\lambda x}$ とおくと，一般の n に対して，$\frac{d^n}{dx^n}y=\lambda^n y$ なので，斉次方程式は，

$$\left(\lambda^2+a_1\lambda+a_2\right)e^{\lambda x}=0$$

となる．$e^{\lambda x}\neq 0$ であるから，解くべき問題はこの二次方程式 (**特性方程式**) になる．この解を λ_1,λ_2 とする．

i. 重根で無い場合：$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0,\ \ \lambda_1\neq\lambda_2$

関数 $e^{\lambda_1 x}$ と $e^{\lambda_2 x}$ は一次独立[c]なので，任意の定数 C_1，C_2 を用いて，微分方程式の一般解は，

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

となる．

ii. 重根の場合： $(\lambda-\lambda_0)^2=0$

この場合は，一次独立な関数が一つ必要である．ここでは，$y(x)=A(x)e^{\lambda_0 x}$ とおいて，改めて斉次方程式に代入し，$A(x)$ の満たすべき条件を導いてみる．その条件は，$A''(x)+(2\lambda_0+a_1)A'=0$ であり，例えば，$A(x)=x$ はその条件を満たしている．それゆえに，一般解は，

$$y(x)=C_1e^{\lambda_0 x}+C_2xe^{\lambda_0 x}$$

とあらわされる．

(c) 特殊解の見付け方:

一般に特解を見付けるのは少々面倒であるが，幾つかの場合についてはその手続きを示すことができる．

---

[c]定数 C_1，C_2 に対して，

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0 \tag{1}$$

が成り立つのが，$C_1=C_2=0$ の場合に限られるときに，$y_1(x)$,$y_2(x)$ は一次独立であるといい，そうでないときに，一次従属という．

i. $f(x)$ が多項式の場合：
先の特性方程式が $x = 0$ を n 重根に持つ場合は，$p(x)$ を $f(x)$ と同じ次数 r の多項式として，$x^n p(x)$ が特殊解であることを示すことができる．

例 $\dfrac{d^2}{dx^2}y - \dfrac{d}{dx}y - 2y = x + 1$

上の指針より，この方程式の特殊解は，p, r を未知係数として，$px + r$ となる．代入することで，未知係数を決める．

$$-p - 2(px + r) = x + 1 \implies p = -\frac{1}{2}, r = -\frac{1}{4}$$

これより，一般解は,

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

となる．

ii. $f(x) = ke^{\alpha x}$ の場合：
先の特性方程式が $x = \alpha$ を n 重根に持つ場合は，$Ax^n e^{\alpha x}$ が特殊解であることを示すことができる．

iii. $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$ の場合：

iv. $f(x) = k\cos(ax + b)$ の場合：

$\cdots$ 続く．

3-4. 慣性抵抗 (Inertial resistance) のある場合の落下

- 慣性抵抗： 流体がぶつかることによって生じる抵抗力
  - 流体の密度：ρ
  - 物体の断面積： S
  - 速度：v

  単位時間あたりに Sv だけの流体に速度 v で衝突している．力積は $\rho S v^2$ に比例して，流体からの反作用を受ける．

- 落下運動

  運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}z = -mg + k\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{2}$$

  ここで，m は質点の質量，g は重力加速度，$k > 0$[d]は抵抗係数．この運動方程式は右辺の第二項に $v_z = dz/dt$ の**二乗**の項を含んでいて，もはや線形ではない[e]．これは非線形微分方程式である．初期条件は，時刻 $t = 0$ で，位置 $z = 0$，速度 $v = 0$ とする． 解くべき方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}z = -g + \frac{k}{m}\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{3}$$

  これは一度速度 v の満たす方程式に書き直すと，変数分離の形をしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v &= -g + \frac{k}{m}v^2 && (4)\\
\int_0^v dv'\frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} &= \int_0^t dt'(-1) && (5)\\
&\downarrow \ mg/k = A^2\text{とおくと，左辺の被積分関数は,}\\
&\downarrow \ \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{1}{\frac{k}{m}\left(A^2 - v^2\right)} = \frac{m}{k}\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{A+v} + \frac{1}{A-v}\right)\\
&\downarrow \ \text{両辺の積分する．}\\
\frac{m}{2Ak}\left[\log(A+v') - \log(A-v')\right]\Big|_0^v &= \frac{m}{2Ak}\log\left(\frac{A+v}{A-v}\right) = -t && (6)
\end{aligned}$$

---

[d]今は落下運動に限定しているので正の値をとる．上昇する場合は $k < 0$ になる．

[e]微分方程式の 2 つの解 z_1 と z_2 を持ってきたとき，それらの線形結合 $z = C_1z_1 + C_2z_2$ もまたその解になっているにその方程式は線形という．

v について解く．

$$\frac{A+v}{A-v} = \exp\left[-\frac{2Ak}{m}t\right] \Longrightarrow v = -A\frac{1-\exp(-2\frac{Ak}{m}t)}{1+\exp(-2\frac{Ak}{m}t)} = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).^{\mathrm{f}} \tag{7}$$

もう一度積分をすることで位置 z に時間発展が得られる．

$$\begin{aligned}\int_0^z dz' &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt \tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right). \\ z(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt\frac{1}{\sqrt{\frac{kg}{m}}}\frac{d}{dt'}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right). \\ &= -\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right)\Bigg|_0^t = -\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right) \end{aligned} \tag{8}$$

- 図にしてみる．

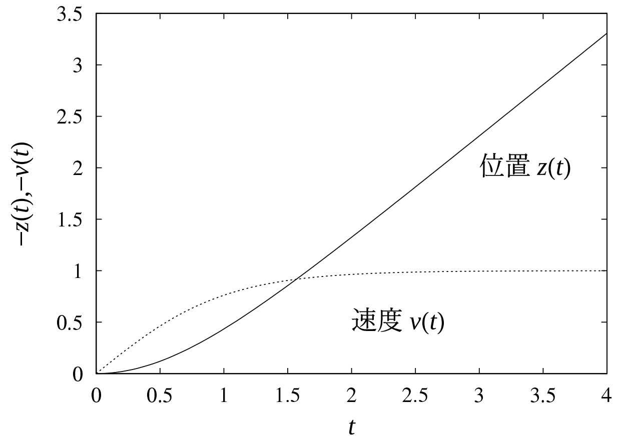

図 1: 位置と速度を時間の関数として描いてみる．係数 m, g, k はすべて 1 とした．

終端速度 v^* は運動方程式 (2) の釣り合いの条件からすぐわかる．終端速度では速度の変化はもはやないので，左辺は 0 になる．これは右辺の力がつり合っていることをいみする．右辺=0 を解くことで，$v^* = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ がわかる．以下ではすぐわかることを見てみる．

- **時間が長い極限** ($t \gg 1$):

[f] 双曲線関数たち $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (hyperbolic cosine),$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $(\sinh x)' = \cosh x$, $\tanh x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} = \frac{d}{dx}\log(\cosh x)$

この極限では，$\log\cosh(\alpha t) = \log\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} \simeq \log(\exp(\alpha t)/2) \simeq \alpha t$ なので，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\sqrt{\frac{kg}{m}}t = -v^* t \tag{9}$$

終端速度での等速運動になっていることがわかる．

– **時間が短い極限 ($t \ll 1$):**
時間 t が小さいとして，展開する．

$$\begin{aligned}\cosh\alpha t &\simeq 1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 + \frac{1}{4!}(\alpha t)^4 + O(t^6) \\ \log\cosh(\alpha t) &\simeq \log'\left(1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2\right) \simeq \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 \end{aligned}\tag{10}$$

を使う[g]と，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\frac{1}{2}\left(\frac{kg}{m}\right)t^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{11}$$

これは自由落下を意味している．これも当たり前．初期条件は速度 0 なので，速度の二乗に比例する抵抗力は運動の初期には影響は少ない．

- 位置と速度の関係だけが知りたい場合はもう少し簡単になる．

微分の公式から，速度の時間微分 dv/dt は，

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}v(z) = v(z)\frac{d}{dz}v(z) \tag{12}$$

となるから，この式を代入すると速度 v の微分方程式 (4) は，

$$v\frac{d}{dz}v = -g + \frac{k}{m}v^2 \tag{13}$$

となる．この式もまた変数分離形になっているので，

$$\frac{v}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = -dz \tag{14}$$

から積分すればよい．この先はみなさんへの宿題として残しておく．

[g] $\log(1+x) = x + x^2/2 + O(x^3))$

第二回物理学 A レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 16 年 5 月 7 日：ver. 1.1

問題 1 「微分方程式」：

1. ある講義の出席人数の減少率はその出席人数に比例し，**かつ**飽和人数 A と各回数での参加人数との差に比例するとする (モデル化)．講義の回数を連続変数 t として，出席人数の変化を時間 t に関する微分方程式として表せ．それを解け．
2. あるクラスでは初回の出席者数は，95 であり，2 回目，3 回目はそれぞれ，77, 62 であった．このデータから，モデルの妥当性を検討し，モデルの定数を推定せよ．また，最終回での出席者数を予測せよ．

問題 2 「微分方程式 力学の問題」： 非常に高いビル (高さ H) から，パラシュートを担いで初速度 0 で空気抵抗を受けて落下する．落下開始から時刻 t^* だけたった後にパラシュートを開くとする．パラシュートを開くことで，より大きな抵抗を受けると考えられる．

1. この問題の運動方程式をたてて，それを解け．時間の関数として，速度をプロットしてみること．
2. 地上に到着する，つまり距離 H だけ落下したときの速度を t^* の関数として求めてみよう．パラシュートを開くタイミングをどのくらいギリギリまで待てるだろうか?[h]

問題 3 [**減衰振動について：** 速度に比例する抵抗のあるばね振動の運動方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \mu\frac{d}{dt}x + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

となる．この振る舞いを議論せよ．特性方程式の方法を用いて解くとよい．

問題 4 「講義について」： 講義に関する感想・意見・要望はないか?

レポート提出に際して

1. ルール：A4 片面で何枚でもよい．氏名と学籍番号と**金曜日のクラスであること**を明記のこと．〆切は 5 月 21 日のこの講義まで．それまでに 16 号館 221A 室まで持ってきてもよい．
2. レポート問題は赤を入れて返却します．
3. ホッチキスで閉じて下さい．

[h] ひょっとしたら，面倒な問題かもしれない．