計算ノート (力学 (金))
福島孝治 (東京大学院総合文化)
2004 年 5 月 28 日: ver. 1.0

5-3. ぶらんこを押して揺らしてみる (振り子の強制振動)

- ぶらんこをうまくこげない子供を後ろから押してやるときの運動を考える．θ 方向の運動方程式に押す力 $F(t)$ を加える．運動方程式は

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + F(t) \tag{1}$$

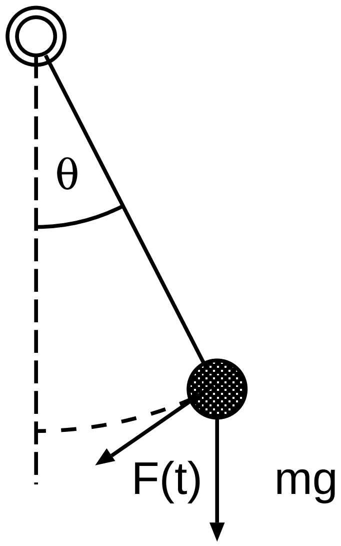
今，後ろから押す力は $F(t) = F\sin(\omega t + \phi)$ のように角振動数 ω の周期的な力だとする．**微小振動** ($\theta \ll 1$) **の場合**について考えることにし，解くべき運動方程式は,

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + f\sin(\omega t + \phi) \tag{2}$$

となる．ここで,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad f = \frac{F}{ml} \tag{3}$$

とおいた.



- 式 (2) は非斉次線形微分方程式なので，ある一つの特解を $\theta_1(t)$ として，一般解は,

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) \tag{4}$$

と書ける．ただし，$\theta_0(t)$ は斉次方程式の解，すなわち外力が無い方程式の解である．特解として，解の形を

$$\theta_1(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

とおいてみると，式 (2) は,

$$\begin{aligned} -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) &= -A\omega_0^2\sin(\omega t + \phi) + f\sin(\omega t + \phi) \\ &\Longrightarrow \left[(\omega^2 - \omega_0^2)A + f\right]\sin(\omega t + \phi) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

となり，任意の時間 t でこの式が成り立つためには,

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{7}$$

となることがわかる．斉次方程式の解 $\theta_0(t)$ は講義で調べた．振幅を B，位相を ψ として，

$$\theta_0(t) = B\cos(\omega_0 t + \psi) \tag{8}$$

で与えられるので，結局一般解は，

$$\theta(t) = B\cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t + \phi) \tag{9}$$

となる．

- 初期条件として，真下の位置で止まっている状況を考える．つまり，$\theta(t=0)=0$，$\dot{\theta}(t=0)=0$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= B\cos\psi + \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\phi \\ 0 &= -\omega_0 B\sin\psi + \frac{f\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\phi \end{aligned} \tag{10}$$

となり，これらより，

$$\begin{aligned} \theta(t) &= B\cos(\omega_0 t)\cos\psi - Bsin(\omega_0 t)\sin\psi + \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t+\phi) \\ &= \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\left(-\cos(\omega_0 t)\sin\phi - sin(\omega_0 t)\cos\phi\frac{\omega}{\omega_0} + \sin(\omega t)\cos\phi + cos(\omega t)\sin\phi\right) \\ &= \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos\phi\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}sin(\omega_0 t)\right) + \sin\phi\left(cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right)\right) \end{aligned}$$

が得られる．

- 特に外力の角振動数 ω と振り子の角振動数 ω_0 が一致するときは，**共鳴**と呼ばれる．その時の解を見ると，0/0 になる部分はロピタルの定理[1]より

$$\frac{1}{\omega_0-\omega}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) \rightarrow \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\omega_0-\omega}\left(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)\right) \rightarrow t\sin(\omega_0 t) \tag{12}$$

[1] $h(x) = f(x)/g(x)$ において，$f(x_0) = 0$，$g(x_0) = 0$ のときに，$\lim_{x\to x_0} h(x)$ を知りたいとする．今，$f'(x_0) \neq 0$，$g'(x_0) \neq 0$ ならば，テイラー展開より，

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots}{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + \cdots} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0) + \cdots}{g'(x_0) + \cdots} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

となることがわかる．

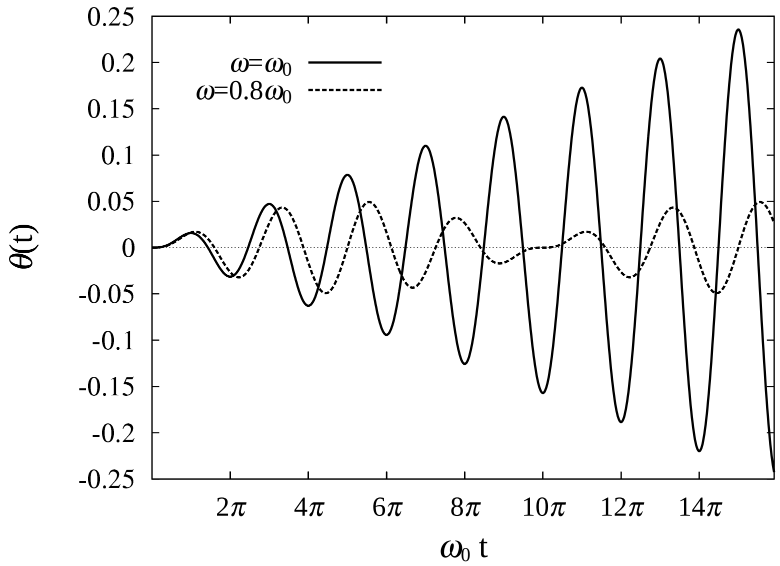


図 1: 振れ角度 θ の時間依存性．外力の位相 ϕ は 0 とし，$f = 0.01$ とした．

となり，解は

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{f}{2\omega_0}\left(\cos\phi\left(\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t)\right) + \sin\phi\left(t\sin(\omega_0 t)\right)\right) \\ &= \frac{f}{2\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_0}\cos\phi\sin(\omega_0 t) - t\cos(\omega_0 t + \phi)\right) \qquad (13)\end{aligned}$$

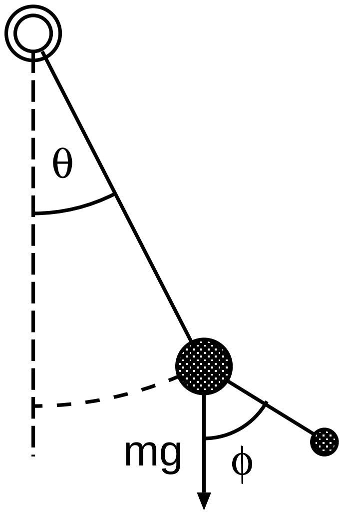
ここから，共鳴状態では振幅は時間と共に増大することがわかる．実際に適当なパラメータでの様子を図に示した．図には共鳴状態からずれた場合 ($\omega = 0.8\omega_0$) の場合も同時に示した．

- ぶらんこをどんどん揺らすためには，ぶらんこの固有角振動数 ω_0 と同じ角振動数で周期的に押すのがよいことがわかる．
- ここでの解析は微小振動の条件の元でのみ正しいが，本質的には揺れを増大させる条件は本質的にこれでよい．
- 共鳴状態での力学的エネルギー E は，式 (13) から求めることができる．

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - cos\theta) \simeq \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \\ &= \frac{ml^2 f^2}{8\omega_0}\left(\omega_0^2 t^2 - \omega_0 t\sin 2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t\right) \qquad (14)\end{aligned}$$

どんどんエネルギーが貯っていくことがわかる．ここでは簡単のため $\phi = 0$ とした．

5-4. ぶらんこ–すわりこぎ編–



- ぶらんこに座って，足を振ることでこいでみる，いわゆる「すわりこぎ」を考える．簡単のために，振り子の外側で足をブラブラと次のように振っていると考える．

$$\phi(t) = a\sin(\omega t + \psi)$$

ここで注意したいのは，上の足の揺らしは力学的に決まっているのではなくて，人間が勝手に振っていることである．足を振り子だと考えて，その振り子が作る張力が注目する振り子系へ働くと考える．

微小振動近似等をすれば，運動方 程式は形式的に，

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + a'\sin(\omega t + \psi) \tag{15}$$

となる．これは，押し揺らしの場合と同じように，強制振動の例となる．結果として，$\omega = \omega_0$ で共鳴が起きる．すわりこぎするときに，どのような振動数で振らしているかを思い出して欲しい．