計算ノート (力学 (水))
福島孝治 (東京大学院総合文化)
2004 年 5 月 12 日: ver. 1.0

3-2. 常微分方程式のいくつかの解き方+おまけ

1. **求積法 ： 一階常微分方程式**

   一般に x の関数 y とその導関数 $y' = \frac{d}{dx}y$ の間に成り立つ式

   $$F(x, y, y') = 0$$

   を一階常微分方程式という．以下にこの微分方程式を積分によって求める方法を示す.

   (a) **変数分離法**： $\frac{d}{dx}y = f(x)g(y)$

   両辺を $g(y)$ で割り，x に関する積分をすると，

   $$\int dx \frac{1}{g(y)} \frac{d}{dx} y = \int dy \frac{1}{g(y)} = \int dx f(x) + C$$

   となる．ここで，C は積分定数となり，初期条件によって決定される.

   例 $\frac{d}{dx}y = (1-2x)y^2$， $y \neq 0$

   変数分離法により，

   $$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2} &= \int dx(1-2x) + C \\ -\frac{1}{y} &= x - x^2 + C \\ y &= -\frac{1}{x - x^2} + C \end{aligned}$$

   (b) **同次形**：$\frac{d}{dx}y = f(y/x)$

   これは，$u = y/x$ と置くことにより変数分離形になる.

   $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y &= \frac{d}{dx}(ux) = \frac{d}{dx}ux + u \\ x\frac{d}{dx}u + u = f(u) &\implies \int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx + C \end{aligned}$$

   例 ：$\frac{d}{dx}y = \frac{3xy}{2x^2 + y^2} = \frac{3y/x}{2 + y^2/x^2}$

   答え：$y^4 = C(x^2 - y^2)^3$ （C は積分定数)

2. **線形微分方程式**

一階の常微分方程式の中で特に関数 y とその導関数 y' についての一次しか含まない微分方程式を線形微分方程式という．一般的に,

$$\frac{d}{dx}y + P(x)y = Q(x)$$

のような形にまとめることができる．

(a) **線形方程式**

両辺に $e^{\int Pdx}$ をかけると,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}y\right)e^{\int Pdx} + Pye^{\int Pdx} &= \frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right) = Qe^{\int Pdx} \\ &\downarrow \quad x \text{ で積分すると} \\ ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + C &\Longrightarrow \boxed{y = e^{-\int Pdx}\left(\int Qe^{\int Pdx}dx + C\right)} \end{aligned}$$

例 1： $\frac{d}{dx}y + y = x^2$

公式に当てはめてみると,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int dx}\left(\int x^2 e^{\int dx}dx + C\right) \\ &= e^{-x}\left(\int x^2 e^x dx + C\right) = e^{-x}\left((x^2 - 2x + 2)e^x + C\right) \end{aligned}$$

例 2： $\frac{d}{dx}y + ay = b\cos(cx)$ a, b, c は定数

やってみよう

(b) **ベルヌーイ形** $\frac{d}{dx}y + P(x)y = Q(x)y^n$，ただし $n \neq 0, 1$.

これは，$z = y^{1-n}$ とおけば，線形微分方程式に変形できる．　　示してみよう．

3. **定数係数線形微分方程式の解法**

高階の導関数を含む線形微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + a_1\frac{d}{dx}y + a_2 y = f(x)$$

で，左辺の係数 a_1, a_2 が定数の場合を考える． 特に，右辺の $f(x)$ が 0 の場合を斉次方程式と呼ばれている．まず，$f(x) \neq 0$ の非斉次方程式の場合の問題が斉次方程式の問題に変形できることをみる．

(a) 特解をみつけると…

ある一つの特別な解 (特殊解)y_0 を見付けたとする．具体的な見付け方は後述する．$f(x)=0$ とした斉次方程式の解を y_1 とすると，$y=y_1+y_0$ は微分方程式の解である．実際に代入してみると，

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}y_1+a_1\frac{d}{dx}y_1+a_2y_1\right)+\left(\frac{d^2}{dx^2}y_0+a_1\frac{d}{dx}y_0+a_2y_0\right)=f(x)$$

となることがわかる．非斉次方程式は特解を見付けることで，斉次方程式の問題に帰着できることがわかった．

(b) 斉次方程式の解

それではこの斉次方程式を解くことにする．まず，$y=e^{\lambda x}$ とおくと，一般の n に対して，$\dfrac{d^n}{dx^n}y=\lambda^n y$ なので，斉次方程式は，

$$\left(\lambda^2+a_1\lambda+a_2\right)e^{\lambda x}=0$$

となる．$e^{\lambda x}\neq 0$ であるから，解くべき問題はこの二次方程式 (**特性方程式**) になる．この解を λ_1,λ_2 とする．

i. 重根で無い場合：$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=0,\ \ \lambda_1\neq\lambda_2$
関数 $e^{\lambda_1 x}$ と $e^{\lambda_2 x}$ は一次独立[a]なので，任意の定数 C_1，C_2 を用いて，微分方程式の一般解は，

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$$

となる．

ii. 重根の場合： $(\lambda-\lambda_0)^2=0$
この場合は，一次独立な関数が一つ必要である．ここでは，$y(x)=A(x)e^{\lambda_0 x}$ とおいて，改めて斉次方程式に代入し，$A(x)$ の満たすべき条件を導いてみる．その条件は，$A''(x)+(2\lambda_0+a_1)A'=0$ であり，例えば，$A(x)=x$ はその条件を満たしている．それゆえに，一般解は，

$$y(x)=C_1e^{\lambda_0 x}+C_2xe^{\lambda_0 x}$$

とあらわされる．

(c) 特殊解の見付け方:

一般に特解を見付けるのは少々面倒であるが，幾つかの場合についてはその手続きを示すことができる．

i. $f(x)$ が多項式の場合：
先の特性方程式が $x=0$ を n 重根に持つ場合は，$p(x)$ を $f(x)$ と同じ次数 r の多項式として，$x^np(x)$ が特殊解であることを示すことができる．

[a]定数 C_1，C_2 に対して，

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0 \tag{1}$$

が成り立つのが，$C_1=C_2=0$ の場合に限られるときに，$y_1(x)$,$y_2(x)$ は一次独立であるといい，そうでないときに，一次従属という．

例 $\dfrac{d^2}{dx^2}y - \dfrac{d}{dx}y - 2y = x + 1$

上の指針より，この方程式の特殊解は，p, r を未知係数として，$px+r$ となる．代入することで，未知係数を決める．

$$-p - 2(px + r) = x + 1 \implies p = -\frac{1}{2}, r = -\frac{1}{4}$$

これより，一般解は,

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

となる．

ii. $f(x) = ke^{\alpha x}$ の場合：
先の特性方程式が $x = \alpha$ を n 重根に持つ場合は，$Ax^n e^{\alpha x}$ が特殊解であることを示すことができる．

iii. $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ の場合：$e^{\alpha} \times$ (i の多項式の場合の解法)

iv. $f(x) = k\cos(ax + b)$ の場合：$f(x) = ke^{i(ax+b)}$ の実数部と考えれば，ii とほとんど同じ

$\cdots$ 続く.