計算ノート (力学 (水))
福島孝治 (東京大学院総合文化)
2004 年 5 月 19 日: ver. 1.0

3-4. 慣性抵抗 (Inertial resistance) のある場合の落下

- 慣性抵抗： 流体がぶつかることによって生じる抵抗力
  - 流体の密度：ρ
  - 物体の断面積： S
  - 速度：v

  単位時間あたりに Sv だけの流体に速度 v で衝突している．力積は $\rho S v^2$ に比例して，流体からの反作用を受ける．

- 落下運動

  運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}z = -mg + k\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{1}$$

  ここで，m は質点の質量，g は重力加速度，$k > 0$[a]は抵抗係数．この運動方程式は右辺の第二項に $v_z = dz/dt$ の**二乗**の項を含んでいて，もはや線形ではない[b]．これは非線形微分方程式である．初期条件は，時刻 $t = 0$ で，位置 $z = 0$，速度 $v = 0$ とする． 解くべき方程式は，

$$\frac{d^2}{dt^2}z = -g + \frac{k}{m}\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{2}$$

  これは一度速度 v の満たす方程式に書き直すと，変数分離の形をしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v &= -g + \frac{k}{m}v^2 && (3)\\
\int_0^v dv' \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} &= \int_0^t dt'(-1) && (4)\\
&\downarrow \quad mg/k = A^2 \text{とおくと，左辺の被積分関数は，} \\
&\downarrow \quad \frac{1}{g - \frac{k}{m}v^2} = \frac{1}{\frac{k}{m}(A^2 - v^2)} = \frac{m}{k}\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{A+v} + \frac{1}{A-v}\right) \\
&\downarrow \quad \text{両辺の積分する．} \\
\frac{m}{2Ak}\left[\log(A+v') - \log(A-v')\right]\Big|_0^v &= \frac{m}{2Ak}\log\left(\frac{A+v}{A-v}\right) = -t && (5)
\end{aligned}$$

[a]今は落下運動に限定しているので正の値をとる．上昇する場合は $k < 0$ になる．
[b]微分方程式の 2 つの解 z_1 と z_2 を持ってきたとき，それらの線形結合 $z = C_1 z_1 + C_2 z_2$ もまたその解になっているにその方程式は線形という．

v について解く．

$$\frac{A+v}{A-v}=\exp\left[-\frac{2Ak}{m}t\right]\Longrightarrow v=-A\frac{1-\exp(-2\frac{Ak}{m}t)}{1+\exp(-2\frac{Ak}{m}t)}=-\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right).\tag{6}$$[c]

もう一度積分をすることで位置 z に時間発展が得られる．

$$\begin{aligned}\int_0^z dz' &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right).\\ z(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt\frac{1}{\sqrt{\frac{kg}{m}}}\frac{d}{dt'}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right).\\ &= -\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right)\Bigg|_0^t=-\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\end{aligned}\tag{7}$$

- 図にしてみる．

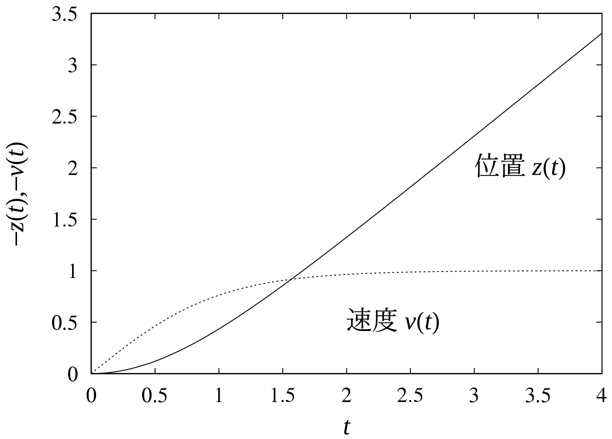

図 1: 位置と速度を時間の関数として描いてみる．係数 m,g,k はすべて 1 とした．

終端速度 v^* は運動方程式 (1) の釣り合いの条件からすぐわかる．終端速度では速度の変化はもはやないので，左辺は 0 になる．これは右辺の力がつり合っていることをいみする．右辺=0 を解くことで，$v^*=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ がわかる．以下ではすぐわかることを見てみる．

- **時間が長い極限** ($t\gg 1$):

[c]双曲線関数たち $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (hyperbolic cosine),$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $(\sinh x)'=\cosh x$, $\tanh x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{(\cosh x)'}{\cosh x}=\frac{d}{dx}\log(\cosh x)$

この極限では，$\log\cosh(\alpha t) = \log\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} \simeq \log(\exp(\alpha t)/2) \simeq \alpha t$ なので，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\sqrt{\frac{kg}{m}}t = -v^* t \tag{8}$$

終端速度での等速運動になっていることがわかる．

– **時間が短い極限 ($t \ll 1$):**
時間 t が小さいとして，展開する．

$$\begin{aligned} \cosh\alpha t &\simeq 1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 + \frac{1}{4!}(\alpha t)^4 + O(t^6) \\ \log\cosh(\alpha t) &\simeq \log'\left(1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2\right) \simeq \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 \end{aligned} \tag{9}$$

を使う[d]と，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\frac{1}{2}\left(\frac{kg}{m}\right)t^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{10}$$

これは自由落下を意味している．これも当たり前．初期条件は速度 0 なので，速度の二乗に比例する抵抗力は運動の初期には影響は少ない．

- 位置と速度の関係だけが知りたい場合はもう少し簡単になる．

微分の公式から，速度の時間微分 dv/dt は，

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}v(z) = v(z)\frac{d}{dz}v(z) \tag{11}$$

となるから，この式を代入すると速度 v の微分方程式 (3) は，

$$v\frac{d}{dz}v = -g + \frac{k}{m}v^2 \tag{12}$$

となる．この式もまた変数分離形になっているので，

$$\frac{v}{g - \frac{k}{m}v^2}dv = -dz \tag{13}$$

から積分すればよい．この先はみなさんへの宿題として残しておく．

[d] $\log(1+x) = x + x^2/2 + O(x^3))$

第二回物理学 A レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 16 年 5 月 19 日：ver. 1.0

問題 1 「微分方程式」：

1. ある講義の出席人数の減少率はその出席人数に比例し，**かつ**飽和人数 A と各回数での参加人数との差に比例するとする (モデル化)．講義の回数を連続変数 t として，出席人数の変化を時間 t に関する微分方程式として表せ．それを解け．
2. あるクラスでは初回の出席者数は，95 であり，2 回目，3 回目はそれぞれ，77, 62 であった．このデータから，モデルの妥当性を検討し，モデルの定数を推定せよ．また，最終回での出席者数を予測せよ．

問題 2 「微分方程式 力学の問題」： 非常に高いビル (高さ H) から，パラシュートを担いで初速度 0 で空気抵抗を受けて落下する．落下開始から時刻 t^* だけたった後にパラシュートを開くとする．パラシュートを開くことで，より大きな抵抗を受けると考えられる．

1. この問題の運動方程式をたてて，それを解け．時間の関数として，速度をプロットしてみること．
2. 地上に到着する，つまり距離 H だけ落下したときの速度を t^* の関数として求めてみよう．パラシュートを開くタイミングをどのくらいギリギリまで待てるだろうか?[e]

問題 3 [減衰振動について： 速度に比例する抵抗のあるばね振動の運動方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \mu\frac{d}{dt}x + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

となる．この振る舞いを議論せよ．特性方程式の方法を用いて解くとよい．

問題 4 「講義について」： 講義に関する感想・意見・要望はないか?

レポート提出に際して

1. ルール：A4 片面で何枚でもよい．氏名と学籍番号と**水曜日のクラスであること**を明記のこと．〆切は 6 月 2 日のこの講義まで．それまでに 16 号館 221A 室まで持ってきてもよい．
2. レポート問題は赤を入れて返却します．
3. ホッチキスで左上を閉じて下さい．

[e] ひょっとしたら，面倒な問題かもしれない．