第一回物理学 A レポート問題の解答例とコメント[1]

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2004 年 5 月 26 日: ver. 1.0

問題 1 「ベクトル演算 1」:

1. 任意の (3 次元空間での) ベクトル$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$に対して，次の恒等式が成り立つことを示せ.

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1}$$

2. $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$を辺とする平向 6 面体の体積は，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ で表されることを示せ.

問題の趣旨:ベクトル積についてなれるために一度は手を動かして見る．それから，1-2 ではベクトル積の幾何学的な意味を考えることで，イメージを深める．

解答例：1 ー 1 さて，解答は，ほとんどの学生さんがしたように，成分を書き下してみると，簡単に示すことができる．一般的な注意だが，ベクトルは $\boldsymbol{A}$ のように太字か，あるいは，$\vec{A}$ のように矢印をつけて書くことにしよう．そうすることでベクトルかただのスカラー変数かの違いがよくわかる．たまに**ベクトル**=スカラーという間違った式変形を見かけるが，このような表記に従えばそのミスは避けられる.

ベクトルの成分を$\boldsymbol{A}=(A_x, A_y, A_z)$ のように書くことにする．左辺は,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} &= (B_yC_z - B_zC_y, B_zC_x - B_xC_z, B_xC_y - B_yC_x) \\
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \begin{pmatrix} A_y(B_xC_y - B_yC_x) - (B_zC_x - B_xC_z)A_z \\ A_z(B_yC_z - B_zC_y) - (B_xC_y - B_yC_x)A_x \\ A_x(B_zC_x - B_xC_z) - (B_yC_z - B_zC_y)A_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2}$$

一方右辺の成分を書き下すと,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} &= (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \\
&- (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A_yC_y + A_zC_z)B_x - (A_yB_y + A_zB_z)C_x \\ (A_xC_x + A_zC_z)B_y - (A_xB_x + A_zB_z)C_y \\ (A_xC_x + A_yC_y)B_z - (A_xB_x + A_yB_y)C_z \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3}$$

この式 (2) と (3) の右辺は等しいから，等式 (1) は示された.

[1] このプリントでは語尾が一貫していないし，ミスもあるかもしれない．何か間違いや誤解を発見されたら連絡 (E-mail: hukusima@phys.c.u-tokyo.ac.jp) して欲しい.

この問題は，成分を書くのが面倒くさく，もっと簡単にできないかと考えたくなる[2]．その例を簡単に紹介する．まず，ベクトル積の幾何学的な意味を考える．$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$と置くと，ベクトル$\boldsymbol{D}$は$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$に垂直な方向を向いている．求めたいベクトル$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}$はベクトル$\boldsymbol{D}$と垂直なので，結果として$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$の2つのベクトルで張られる面に平行であることがわかる．つまり，2つの定数j,kを用いて，

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=j\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{C}$$

と表される．また，$\boldsymbol{E}$は$\boldsymbol{A}$と垂直$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}=0)$であることから，

$$j\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$$

よって，別の定数lを用いて，

$$j=l\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C},\quad k=-l\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

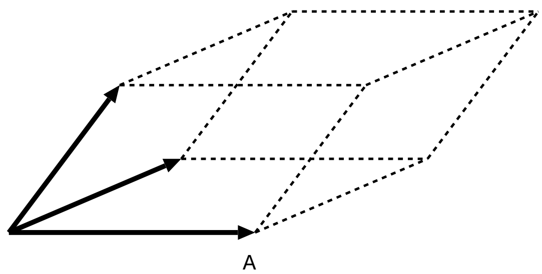
であることがわかり，まとめると，

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=l(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-l(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

となる．この式は$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$に対して線形である．つまり，例えばそれぞれのベクトルを2倍しても成り立つ式である．そこで，何かしら特別なベクトルについて，成り立つように定数lを決めて良い．$\boldsymbol{A}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{B}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{C}=(1,0,0)$とすると，$l=1$がわかり，1. が成り立つことが示された．

解答例：1ー2

ここでは実際にA，B，Cの図形をちゃんと書いてみる必要がある．この他にも座標系は右手系を使っている[3]．右図のように3つのベクトルをとったとする．



まず，ベクトル$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$を$\boldsymbol{D}$とおくと，ベクトル$\boldsymbol{D}$の方向は$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$に垂直で，大きさはその2つのベクトルで書かれる平行四辺形の面積である．この$\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{A}$との内積は，2つのベクトルのなす角をθとして，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|\cos\theta$と書ける．$\boldsymbol{A}\cos\theta$は$\boldsymbol{D}$への射影であるから，平行四辺形に対する高さである．結局，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}$は平行四面体の体積であることがわかる．

注意深い学生さんは，絶対値をとる必要があることを指摘してくれた．この原因は2つあり，まず，右手系か左手系かを事前に明示していないことから来る混乱で，もう一

[2]とはいえ，最初は成分を書いてみるのがやはり基本．困ったら，書いてみる．

[3]直交座標を定義するときに，x軸，y軸を定義した後のz軸の方向には向きの任意性がある．右手系では，x,y軸をそれぞれ右手の親指，人差指としたときに，中指の方向にz軸をとるように座標系を設定する．

つは，3 つベクトルと平行四面体の関係についてを黒板で書いただけであったので，一部不明な部分があったかもしれない．例えば，上図で，$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$を交換すると，負号が出て来る．まとめると,「上図のようにベクトルを明示して，右手系をとることに限定すれば，絶対値をとる必要はない」わけである．

問題 2 「ベクトル演算 2」： 時間 t の関数であるベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ について以下の問に答えよ．

1. 数学的な恒等式
$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$
を示せ．

2. (ちょっと難しいか？) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルだと思うと，この式は $\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ が時間的に変化しない条件を与えている．その条件を満たす力とはどのような性質を持っているか，議論せよ．

問題の趣旨： もうひとつベクトルの演算として，微分を考えてみて，2-2 ではそこに物理の要素をいれてみた．

解答例 2-1: 問題 1 と同様に考えると，成分をいれて示せばいいわけでが，その前に少し微分の演算の性質を考えてみる[4]．いま，実数変数 t の二つのベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ と $\boldsymbol{B}(t)$ があるとする，そのベクトル積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ の微分を考える．x 成分について，書き下し見ると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)\right)_x &= \frac{d}{dt}\left(A_yB_z-A_zB_y\right)=\dot{A}_yB_z+A_y\dot{B}_z-\dot{A}_zB_y-A_z\dot{B}_y\\ &= \left(\dot{A}_yB_z-\dot{A}_zB_y\right)+\left(A_y\dot{B}_z-A_z\dot{B}_y\right)=\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right)_x\end{aligned}$$

となり，通常の積の微分ルールが成り立っていることがわかる[5]．この性質と $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ であることを使うと，

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}+\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

が示された[6]．

解答例 2-2: ここで，$\boldsymbol{r}$を位置ベクトルだと考える．今，質点の質量を m とすると，$m(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は角運動量と呼ばれるベクトル量である．上の式は

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\right)=m\left(\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}\right)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{4}$$

[4]成分を代入して，恒等式の右辺と左辺を比べればよいが，そうするとなんとなくこの問題の旨味が失われているような気がする．

[5]もとの微分の定義に戻っても，同様に示すことが出来る．

[6]ここでも，陰に 3 次元空間を仮定していた．一般の次元についての質問があったが，その場合のベクトル積はこのように簡単な定義ではない．上のような積の微分公式が成り立つかどうかは良く知らない．興味があれば，是非調べて教えて欲しい．

と書ける．ここで，最後の変形には運動の第二法則 (運動方程式) を用いており，$\boldsymbol{F}$は力ベクトルである．この式は,「角運動量の時間変化は，力のモーメント ($\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$) に等しい」ことを意味している．

さて，角運動量が時間に依存しない場合を考えると，その条件は，右辺をみれば，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=0$となることがわかる．このことから，この条件は，力ベクトル$\boldsymbol{F}$はいつでもゼロ[7]か，位置ベクトルと平行であることがわかる[8]．後者の性質をもつ力は中心力と呼ばれ，例えば万有引力やクーロン力はこの範疇に入る．

解答では「面積速度一定則」について言及しているレポートもあったが，これは角運動量保存 ($\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$が一定) であることの別の表現であることに注意しよう．微小時間δtに位置ベクトルが掃引する 3 角形の面積Sは，$S=|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\delta t|/2$であるから，面積速度 (単位時間あたりの面積変化) は

$$\frac{d}{dt}S=\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\delta t|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}|=\frac{1}{2m}|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}|$$

となり，角運動量の大きさに比例していることがわかる．この段階では，力については何も言っていない．上の議論から,「力が中心力であれば，角運動量保存則が言えて，同時に面積速度が一定である」ことがわかる．ケプラーの第二法則は，この法則?の万有引力という特別な例と考えることができる．

問題 3 「過去問から」 どちらか一つでもよいことにする．

1. 重力加速度の値を測定する方法を提案せよ．
2. 力が伸びに比例するバネがある．つまり，伸びベクトルを$\boldsymbol{x}$とすると，($\boldsymbol{F}\propto-\boldsymbol{x}$) となる．この比例係数 (バネ定数) を測定する方法を提案せよ．

問題の趣旨：最近の高校の教科書を見ると，実際に実験する課題がかなり採り入れられているので，このあたりは慣れているのかも知れないが，運動方程式を解くことの意味を考える機会になればいいと考えての出題である．

レベル 1：まずは力の釣合から出そうという解答がある．

1. 等加速度運動する電車の中では慣性力と重力がつり合っているときに傾いている角度から求める．
2. ひもを付けたおもりを一定の角速度で回転させ，その時の遠心力とのつり合いから求める．
3. 重力とバネの釣合からバネ定数を求める．

他には運動方程式の解と運動の観測から決める方法があった．

1. 重力中の落下問題: $h=\frac{1}{2}gt^2$

[7]これはまったくつまらない世界の話になってしまっている

[8]このことから，$\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$と表すのはよいが，この比例係数$f(r)$を$r$に依存しない定数と置くのは，制約条件として強すぎる．定数となる例として，バネの復元力の場合が挙げられるが，一方で，万有引力の場合は，$f(r)\propto 1/r^2$となりrに依存する．

2. 振り子の周期： $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
3. バネ振動の周期：$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

レベル 2：観測を気にする．

- 誤差：統計誤差と系統誤差の違い
- 空気抵抗，その他の摩擦
- 微小振動近似
- 観測時間の精度

問題 4 「講義について」： 講義に関する感想・意見・要望はないか?この講義に期待していることは何か？

いろいろと御意見ありがとうございました．個別にはそれなりにコメントを返したつもりです．