

- not so Frequently Asked Questions -

1. (a) 質量 M の一様な円柱の慣性モーメント: $Ma^2/2$

2. (a) 質量 M の一様な球の慣性モーメント: $2Ma^2/5$

宿題で出した慣性モーメントの計算例の答えを示す.

(a): 半径 a , 長さ L で質量 M の円柱の場合を考える. 一様な密度 $\rho = \frac{M}{\pi a^2 L}$ を用いて, 慣性モーメント I は

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-a}^a dx \int_{-a}^a dy \int_0^L dz \rho(x^2 + y^2) \\
 &\downarrow \text{極座標へ変換: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}, dx dy = r dr d\theta \\
 &= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L \rho r^2 = 2\pi L \rho \int_0^a r^3 dr = 2\pi L \frac{M}{\pi a^2 L} \frac{a^4}{4} = \frac{Ma^2}{2}
 \end{aligned}$$

(b) 半径 a の球についての, z 軸回りの慣性モーメントは,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-a}^a dz \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} r dr \int_{2\pi}^0 d\theta \rho r^2 \\
 &= 2\pi \rho \int_{-a}^a dz \frac{(a^2 - z^2)^2}{4} = \frac{\pi \rho}{2} \left(2a^5 - 2a^2 \frac{2}{3} a^3 + \frac{2}{5} a^5 \right) = \frac{8}{15} \pi \rho = \frac{2}{5} Ma^2
 \end{aligned}$$

なんか絵がヘンですけど, 積分領域のイメージの助けになれば ...

