

2. 振り子の周期： $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
3. バネ振動の周期： $T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

レベル2：観測を気にする．

- 誤差：統計誤差と系統誤差の違い
- 空気抵抗，その他の摩擦
- 微小振動近似
- 観測時間の精度

例えば，十分長い時間の観測によって，精度をあげようとする試みがたくさんあった．振り子の問題ならば，1周期分ではなくて，もっと長く観測して平均を求める．また重力落下では斜面を落とすことで，実効的な重力を弱くし，落下の時間を長くするようにしている．こうすることで，観測時間の精度はあがるかも知れない．これは上の言葉でいえば，観測によるふらつき具合を減少させるので，統計誤差を改善していることになる．しかし，その代償として，振り子では空気抵抗の効果がどんどんでてくるだろうし，斜面の問題では斜面との摩擦．あるいは，球だところがることでエネルギーを損失する．これらは，系統的に真値からのずれを産み出すので，系統誤差と呼ばれるものである．統計誤差を小さくすると，今度は系統誤差が見えだしてくる例である．キレイな実験データが出たからといって，真の値に近付いているとは限らないのである．

問題 4 「講義について」：講義に関する感想・意見・要望はないか？この講義に期待していることは何か？
いろいろと御意見ありがとうございました．個別にはそれなりにコメントを返したつもりです．

第二回物理学 A レポート問題の解答例とコメント

福島孝治 (東京大学院総合文化)

2004年6月8日: ver. 1.0

問題 1 「微分方程式」:

1. ある講義の出席人数の減少率はその出席人数に比例し，かつ飽和人数 A と各回数での参加人数との差に比例するとする (モデル化)．講義の回数を連続変数 t として，出席人数の変化を時間 t に関する微分方程式として表せ．それを解け．
2. あるクラスでは初回の出席者数は，95 であり，2 回目，3 回目はそれぞれ，77, 62 であった．このデータから，モデルの妥当性を検討し，モデルの定数を推定せよ．また，最終回での出席者数を予測せよ．

問題の趣旨：これは微分方程式で表される適当なモデルを設定して，その方程式を解く練習問題である．ちょっと文章が悪くて，混乱させたかもしれない．1-2 ではモデルに含

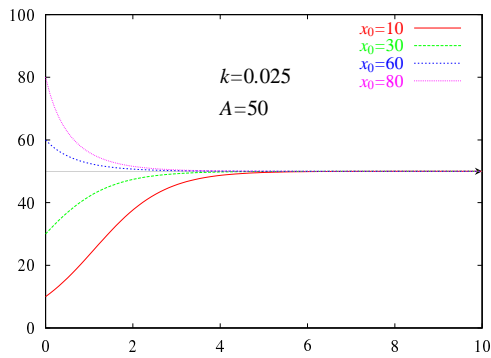


図 1: (i) の場合:初期の値 x_0 によらず, 長時間極限では A の値に収束している.

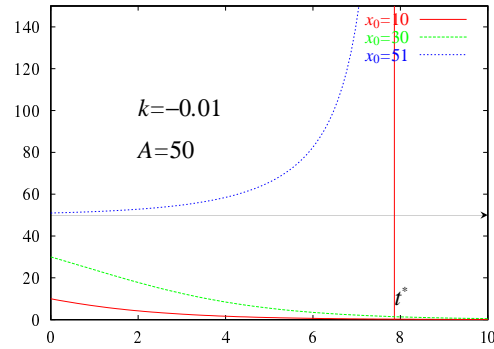


図 2: $k < 0$ の場合:初期値によって, 絶滅したり, 人口爆発が起こったりする.

まれるパラメータを実際のデータから推定しようということである. この問題は物理とは全く関係ないが, モデルを立てて, 実験結果から妥当性を検討するという物理学で行う一連の流れを体験することも目的である. そのために, データは解けるような「やさしい」ものではなくて, 実測値を与えてみたし⁹, また「妥当性」とは何かについては何も事前情報を与えなかった.

1-1 この問題は或る種の人口問題のモデルである. 一番有名なのは, マルサス (Malthus) の法則

「ある生物の個体群を考え, その数を x としたときに, 単位時間辺りの出生率を n , 死亡率を m としすると,

$$\dot{x} = nx - mx = (n - m)x$$

と表せる。」

である. ここで $a = n - m$ をマルサス係数と呼ぶ. ただ, この係数がまったく人口に依存しないというのはおかしいので, そこに改良を加え, $a = k(A - x)$ としたのが今回の問題である. 微分方程式は,

$$\dot{x} = k(A - x)x \tag{5}$$

となり, これは Pearl-Read の Logistic equation と呼ばれている¹⁰.

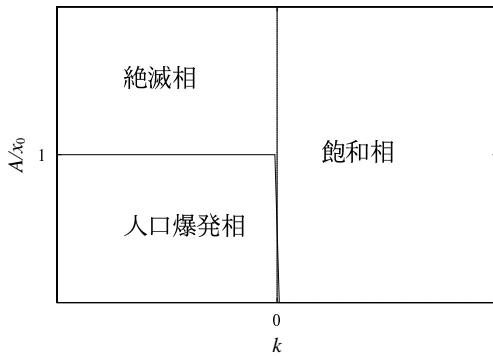
さて, まずはこの微分方程式を解くことにする. この方程式は変数分離で簡単に解くことができる.

$$\frac{dx}{x(A - x)} = \frac{1}{A} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{A - x} \right) dx = k dt$$

$$\log \left(\frac{x}{A - x} \right) = kAt + C$$

⁹ただし, 大失敗したのはデータの数が少なかったことだ. もう2・3点増やしておけばよかった.

¹⁰らしい. 問題を出した後で知った.



初期値のちがいで、解の様子が全く異なっている。この境界の値を閾値 (threshold) と呼ぶが、このような現象は非線形の効果である。パラメータの違いによる解の性質を絵にまとめておくと、こんな感じ。

図 3: パラメータ k vs A/x_0 上で、 $t \rightarrow \infty$ での振る舞いから分類をした相図。

初期条件として、 $x(t=0) = x_0$ とすると、

$$x(t) = \frac{Ax_0 e^{kAt}}{A - x_0 + x_0 e^{kAt}} \quad (6)$$

となる。次の問題に行く前にこの解の性質を詳しく見ておこう。まず、(i) $A, k > 0$ の場合は、

$$x(t) = \frac{A}{1 + (A/x_0 - 1)e^{-kAt}} \quad (7)$$

となり、この解は、長時間極限で A に収束することがわかる。これが問題文の中で A を飽和人数と呼んだ理由である¹¹。

一方で、(ii) $A > 0, k < 0$ かつ、 $A > x_0$ の場合は、 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 、すなわち、「絶滅」する。また、(iii) $A > 0, k < 0$ かつ、 $A < x_0$ の場合は、 $t^* = \frac{1}{kA} \log(A/x_0 - 1)$ で x が発散する「人口爆発」が起こる。その中間、つまり $A = x_0$ では、人口の変化はない。

1-2 さて、データを式 (6) に当てはめてみる。先にも述べた通り、知らないパラメータが 3 つ (A, k, x_0) あり、与えられたデータが 3 点なので、正確に解くことができる。結果は、 $k = -0.00040064$, $A = 610.077$, $x_0 = 116.29$ 、となる。これは先の相図 3 で「絶滅相」に対応している。このまま最終回の出席者を予想するとすれば、 $0(t \rightarrow \infty$ ならば)、 $6(t = 13$ 回目ならば) となる。

ここから「妥当性」を議論してみることにする。しかし、そもそも妥当性とはどういうことだろうか。もしも、式 (5) のモデルがデータを表現できるかどうかを妥当性の基準だとすれば、この問題はぴったり解ける状況なので、議論の余地がない。つまり、モデルが外れることがありえないからだ。そこで、このモデルから帰結される結果が何か他の基準と照らし合わせたときに「もっともらしい」かを考えることになるだろうか? 例えば、最終回の出席数が 0 や 6 ということは常識的にありえないから、妥当でないということはあるだろう。また、「飽和人数 A が 610 とは大きすぎる」や「モデルが絶滅相にある」ことで妥当でないとも言えるかも知れない。いずれにしても、基準があいまいで、客観的ではない。この状況で議論するのは難しいということと言える¹²。

¹¹いきなり 1-2 の数値を当てはめて、 A の値を見ては混乱するだけであっただろう。式が出てきたらどんな振るまいをするかを見るのは基本である。

¹²えー、落ちはそのなかっ!? だから、データが少ないんだって。

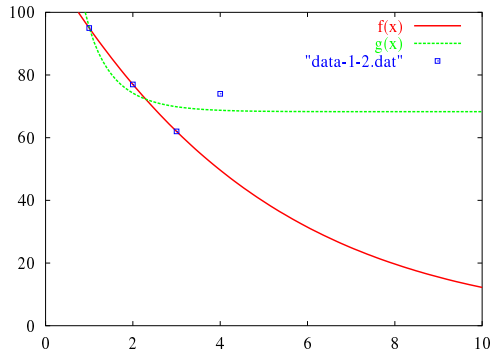


図 4: fitting の結果：3 回目までのデータを使うと，下側の曲線が得られ，4 回目までのデータから上側の曲線が得られた．

そこで，4 回目のデータを付け加えることにする．実測値は 74^{13} であった．今度は，データ数が未知定数の数よりも多いので，解くことはできないし，モデルでデータを完全に記述することはできないだろう．ここでは，最小二乗法によってパラメータを決定することにする．そこでは，パラメータを指定したときの出席人数の予測値と実測値 $(y(1), y(2), y(3), y(4))$ のずれ $\chi^{(2)}$

$$\chi^{(2)}(x_0, k, A) = \sum_{i=1}^4 (y(i) - x(i))^2$$

を計算し，それが最小になるようにパラメータを決定しようとする．実際の技術的なところは省略するが，答えは， $k = 0.0185098, A = 68.2999, x_0 = 1.19401e + 09$ となる．なんとか，絶滅相から脱出して，「飽和相」に入ることが出来た．ちょっと x_0 の値が大きくて意味がわからないが，飽和人数は 68 とそれっぽい値になった．さて，ここで妥当性はといえば，やはりそれほど自明ではない．通常は，ずれ $\chi^{(2)}$ の大きさが判断基準になるが，どの程度のずれまで許すかは主観的である．データの数が多い状況の誤差論では，標準偏差の大きさから許容範囲を議論することが多い．この先は冬学期に実験をやるときにみっちり学んで欲しい．

問題 2 「微分方程式 力学の問題」：非常に高いビル(高さ H) から，パラシュートを担いで初速度 0 で空気抵抗を受けて落下する．落下開始から時刻 t^* だけたった後にパラシュートを開くとする．パラシュートを開くことで，より大きな抵抗を受けると考えられる．

1. この問題の運動方程式をたてて，それを解け．時間の関数として，速度をプロットしてみること．
2. 地上に到着する，つまり距離 H だけ落下したときの速度を t^* の関数として求めてみよう．パラシュートを開くタイミングをどのくらいギリギリまで待てるだろうか？

問題の趣旨：一回の微分方程式を解いて，初期条件の接続を正しくやる練習問題である．

¹³ レポートの締め切り前に講義で付け足したデータ．実際には，あまりに急速に減って来たので，ここにレポートの締め切りを設定したのであった．

ここでは空気抵抗の詳細は限定していないので、自分で適当に仮定することになる。運動方程式は、速度に比例した抵抗を仮定して、

$$m\ddot{z} = -mg - \kappa(t)z \quad \text{with } \kappa(t) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{for } t < t^* \\ \kappa_2 & \text{for } t > t^* \end{cases}$$

となる。但し、 $t > t^*$ ではパラシュートを開くので、抵抗の係数の大小関係は、 $\kappa_1 < \kappa_2$ とする。運動方程式は速度に対する一階微分方程式に

$$\dot{v} = -g - \frac{\kappa}{m}v$$

これは変数分離で解くことが出来る。その解は、ある定数 C を用いて、

$$v = \frac{m}{\kappa} \left(Ce^{-\frac{\kappa}{m}t} - g \right)$$

と表せる。時間の進行とともに順番に定数を決めて行く。

1. $t < t^*$ として、 $t = 0$ で初速度 0 だから、 $C = g$ なので、

$$v = \frac{mg}{\kappa_1} \left(e^{-\frac{\kappa_1}{m}t} - 1 \right)$$

2. $t = t^*$ での条件は、 $v(t^*) = \frac{m}{\kappa_1}g(e^{-\kappa_1 t^*/m} - 1)$ となるので、これを初期条件として、改めて定数 C を決めればよい。

$$\frac{m}{\kappa_1}g(e^{-\kappa_1 t^*/m} - 1) = \frac{m}{\kappa_2} \left(Ce^{-\frac{\kappa_2}{m}t^*} - g \right)$$

これを C について、解くと、

$$C = \frac{g}{\kappa_1} e^{\kappa_2/m t^*} \left[\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_2 e^{-\kappa_1/m t^*} \right]$$

となる。

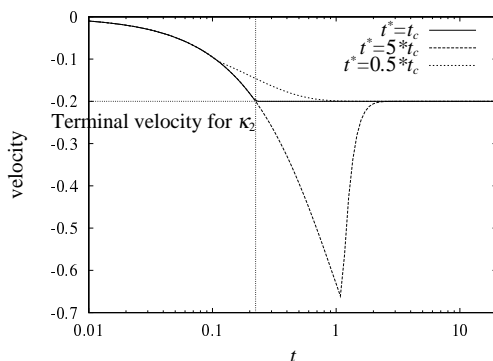


図 5: 速度の時間依存性。ここでは、 $m = 1.0, g = 1.0$ として、 $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 5.0$ とおいた。 $t = t^*$ で $v(t)$ が κ_2 の終端速度になっている時間の条件を t_c とする。グラフには、3つのプロット ($t^* = t_c, t^* = 0.5t_c, t^* = 5t_c$) を描いた。

3. これらをまとめると,

$$v(t) = \begin{cases} \frac{m}{\kappa_2} g \left(\frac{e^{\kappa_2/mt^*}}{\kappa_1} (\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_2 e^{-\kappa_1/mt^*} - 1) \right) & \text{for } t > t^* \\ \frac{m}{\kappa_1} g \left(e^{-\kappa_1/mt} - 1 \right) & \text{for } t < t^* \end{cases}$$

典型的な場合を図 (図 5) を示しておく.

この運動は, 最終的には κ_2 できまる終端速度に収束するが, t^* での速度とその終端速度との大小関係から, 単調か速度を減少させるかが変わって来る. 単調である条件は, $v(t^*) > -\frac{\kappa_2}{m}g$ で決まる.

解答例 2-2: これは確かに難しかった.

問題 3 [減衰振動について: 速度に比例する抵抗のあるばね振動の運動方程式は,

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \mu \frac{d}{dt}x + \omega^2 x = 0 \quad (8)$$

となる. この振る舞いを議論せよ. 特性方程式の方法を用いて解くとよい.

問題の趣旨: 2 階の線形微分方程式を解いてみようということです. これは, バネの振動の問題と, 速度に比例する抵抗の問題の合わせ技で, 特性方程式を用いて解くときに, 幾つかの状況が出て来る. また, 問題では陽に初期条件を与えなかったので, そこは自分で適当に設定し, 答えを図にすることができるかも課題である.

元々の問題の由来は, 速度に比例する抵抗力がある状況でのバネの振動である. 平衡点からのずれ x に対して, 質量 m の質点の運動方程式は,

$$m\ddot{x} = -kx - \kappa\dot{x} \quad (9)$$

となる. ここで, k はバネ定数, κ は抵抗係数である. この運動方程式の両辺を割ることで, 問題の式が出て来る. ただし, $\mu = \kappa/m$, $\omega^2 = k/m$ である.

この微分方程式の特性方程式は,

$$\lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0 \quad (10)$$

である. 一般解はその根の性質で分類される.

(i) $\mu^2 - 4\omega^2 > 0$: 抵抗力が大きい場合

このとき特性方程式の根は, それぞれ

$$\alpha = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \beta = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (11)$$

となる. 相異なる 2 つの負根 $-\alpha, -\beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) をもつ. 一般解は,

$$x(t) = C_1 \exp(-\alpha t) + C_2 \exp(-\beta t) \quad (12)$$

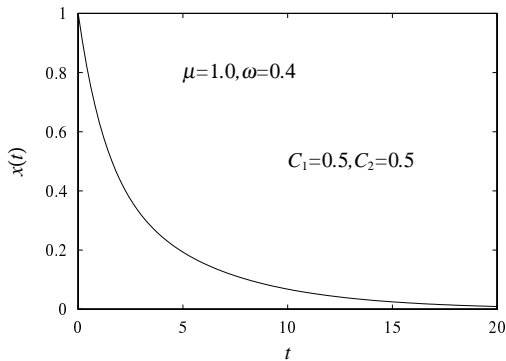


図 6: (i) の場合: 振動系の問題なのに振動しないのはなぜかという質問があったが, ここではとても摩擦が大きい状況に相当している.

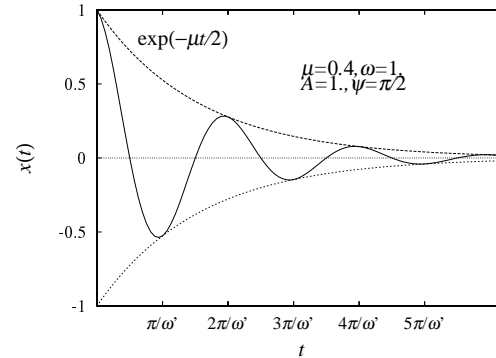


図 7: (ii) の場合: 振動の周期がよくわかるように横軸のスケールを書きしておく必要がある. たまに周期がどんどん早くなっているようなグラフがあった. 振幅が減衰するので, 周期が早くなるような感じがするかもしれないが, それは誤解である. 周期はいつでも一定.

であり, どちらも負であることから, 長時間極限では平衡点に収束する ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$)¹⁴. $x(t)$ が単調減少かどうかは初期条件に依存する. バネがのびる方向に初速度をもって引っ張れば一度伸びてから縮む. ただし, その場合でも $x(t) = 0$ を横切ることはない.

(ii) $\mu^2 - 4\omega^2 < 0$: バネ定数が大きい場合

特性方程式の根は虚数 $-\mu/2 \pm i\omega'$ になるから, 一般解は,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\mu/2t} (C_1 \exp(i\omega't) + C_2 \exp(-i\omega't)) \\ x(t) &= e^{-\mu/2t} ((C_1 + C_2) \cos(\omega't) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega't)) \\ &= Ae^{-\mu t/2} \sin(\omega't + \psi) \end{aligned} \quad (13)$$

である. ここで, $\omega' = \sqrt{4\omega^2 - \mu^2}/2$ であり, A, ψ は C_1, C_2 から決まる定数である. このような運動は減衰振動と呼ばれている. 単振動と比べると, 振幅は指数関数的 $\exp(-\mu t/2)$ に減少し, 角振動数が ω から ω' に減っている. 減衰するのは振幅であって, 角振動数あるいは周期ではないことに注意しよう.

(iii) $\mu^2 - 4\omega^2 = 0$: ちょうどつり合う場合

これは特性方程式が重根を持つときである. 一つの基本解は, $x_1(t) = \exp(-\mu t/2)$ であるが, このままでは一次独立な 2 つの関数が得られていない. そこで, $x(t) = A(t) \exp(\lambda t)$ とおいて, 改めて微分方程式に代入して, $A(t)$ の満たすべき条件を

¹⁴ たびたび見掛けた解答に「非周期的運動」とか「振動しない」とかがあった. これは説明になっていないのではないかな. 振動しない, 非周期的運動ってとても沢山ある. α, β が共に負であることを明示することは大切で, そうでないと, 発散する可能性もある. 一度はグラフで示してみるといろいろとわかる.

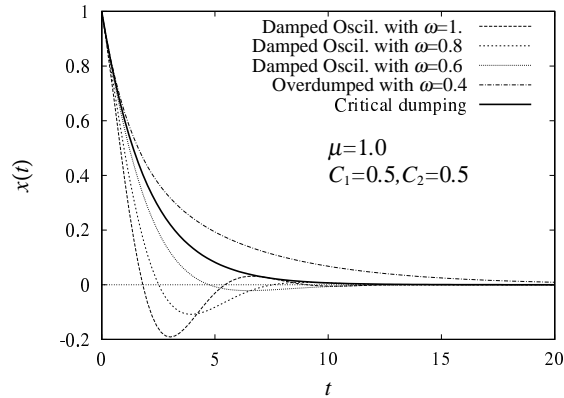


図 8: (iii) の場合: ちょうど, (i) と (ii) の境目なので「臨界」と呼ばれているのだろう。グラフには $\mu = 1$ として, ω を変えて書いてみた。 ω を減らして振動運動しなくなるところがこの臨界減衰である。

考えてみる。元々の特性方程式も考慮すると, 条件は $\ddot{A} + (2\lambda + \mu)\dot{A} = 0$ となるが, $A(t) = t$ はその条件を満たす。結果として, もう一つの基本解は $x_2(t) = t \exp(-\mu t/2)$ となることがわかる。一般解は,

$$x(t) = e^{-\mu t/2}(C_1 + C_2 t) \quad (14)$$

となる。この運動は臨界減衰と呼ばれている¹⁵。

グラフを描けるように, 指摘したが, そのことについて幾つかの注意点がある。また, グラフを描くためには初期条件をきちんと設定しないとイケない。そこがいい加減なレポートがかなりあった。例えば,

- 縦軸横軸のスケール(目盛り)がない。そうしないと, どんなスケールの現象なのかがまったくわからない。
- 初速度を 0 と設定しているのに, $t = 0$ のところで傾きが 0 でない。
- 減衰振動のときに, どういうわけか周期が段々小さくなっている。

今後は, 注意して欲しい。

¹⁵ 臨界とはギリギリという意味である。どうして臨界減衰なのかはグラフを書きみればわかる(書かなくてもわかるが...)。