第三回物理学 A レポート問題の解答例とコメント

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 16 年 7 月 8 日 : ver. 1.2

問題 1 「振り子の張力」:

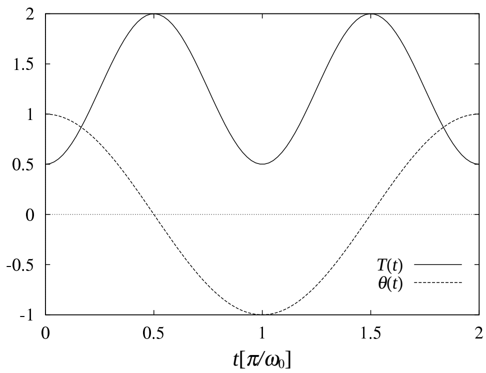
1. 講義で話した振り子の問題で，張力の時間変化を求め，グラフに記せ.
2. また，その意味を解釈せよ.

問題の趣旨: これは講義の時に出していた宿題である．振り子の運動方程式を解いたが，張力がどうなっていたかは示していなかったので，ここで考察する.

1-1: まず，動径方向の運動方程式 $-ml\dot{\theta} = mg\cos\theta - T$ から，張力 T を求める.

$$
\begin{aligned}
T &= mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \\
&\downarrow \quad \text{振動の一般解}\theta = A\cos(\omega_0 t + \phi)\text{ を使う．ここで } A \text{ は振幅，} \omega_0 = \tfrac{g}{l} \text{ は振り子の振動数.} \\
&\downarrow \quad \text{それから，微小近似.} \cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2} \\
&\simeq mg(1 - \frac{\theta^2}{2}) + ml\dot{\theta}^2 \\
&= mg\left(1 - \frac{A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \phi)\right) + mlA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \phi) \\
&= mg\left(1 + A^2 - \frac{3}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

張力の温度依存性をグラフに書いておく. $mg = 1$ として，振幅 $A = 1.0$，初期位相 $\phi = 0$ とした.



1-2: 式 (1) から，張力の大きさの周期は振り子の周期の 1/2 倍になっていて，ちょうど，$\theta = 0$ のとき，つまり，振り子の速さが最も大きいとき，かつ重力の効果が一番大きいときに張力が最大になっている．振り子に乗ってみると，遠心力と重力が $\theta = 0$ で最大になっている.

問題 2 「エネルギー保存則」: 質量 m の質点の力学的エネルギー E を,

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U(\boldsymbol{x})$$

とする．ここで，$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{v}$は質点の位置ベクトル，速度ベクトルであり，$U(\boldsymbol{x})$ はポテンシャルである．力学的エネルギーが保存していること，つまり $dE/dt = 0$ であることを示せ．その際に，必要な条件は全て明示すること.

問題の趣旨: 講義では，ある質点の軌跡に沿って，ある点と軌跡上のある点の力学的エネルギーが等しいことを導いた．ここでは，エネルギー保存則をエネルギーの時間変化が無いとして確認する．これも宿題で出した問題であった．さて，順番にやってみる．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + u(\boldsymbol{x})\right) \\
&\quad (U\text{ は時間依存しないが，}\boldsymbol{x}\text{を介して時間に依存している．}) \\
&= m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\frac{d}{d\boldsymbol{x}}U, \\
&= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot(-\boldsymbol{F}) = 0
\end{aligned}
$$

最後の変形で使ったのは,

1. 運動方程式: $m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$
2. ポテンシャルの定義: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U(\boldsymbol{x})$

であった[a].

問題 3 「ポテンシャル曲線」: 2つの原子間に働く力のモデルとして，レナード・ジョーンズ (Lennard-Jones) 力がある．質量 m の原子がもう一つの原子から受けるポテンシャルは，原子間の距離を r として,

$$U(r) = 4\epsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$

と与えられる．ここで，σ, ϵ は定数とする．原子間の距離 r だけに注目し，一次元空間の力学的運動について，以下の問いに答えよ．

1. このポテンシャルから力を求めよ．
2. この系に力学的エネルギー E を与えたところ，周期運動をした．周期運動が起きるための E の条件を示せ．
3. その周期運動の振幅が非常に小さい場合に，その周期をおおざっぱに見積もってみる．ポテンシャルを平衡点の回りで 2 次曲線近似することにより，周期を求めよ．
4. (難かも) もうすこし精度よく周期を求めてみよう．

問題の趣旨: 講義で扱ったポテンシャル論に関する例題である．このポテンシャルは中性原子間のポテンシャルのモデルとしてよく用いられる．遠方の Von der Waals 引力に関する r^{-6} と，近傍でのハードコア的な斥力を r^{-12} として近似したモデルになっている．

---

[a] 一次元の問題として扱っている解答例がたびたび見受けられた．もちろん，3 次元運動でもエネルギー保存則は同じ条件のもとに成立する．ベクトルの考え方に慣れる練習として，復習しておこう．スカラーの式にとベクトル変数が単独で存在することはありえないので，式の意味を考えながら...

3-1:まずは，ポテンシャルが与えられているので，力を求める．この問題では一次元の運動に限定されているので，力は，

$$F_r = -\frac{d}{dr}U(r) = 24\epsilon\sigma\left(2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right)$$

となる．

3-2:力学的エネルギー E が与えられたときに，振動運動するための E の条件は，ポテンシャルの谷の中にとじ込まれている条件である．これはグラフを書いてみればすぐに様子がわかる．ポテンシャルの極値は，$U'(r^*)=0$ より，平衡点[b]は $r* = 2^{1/6}\sigma$ であり，そのときのポテンシャルの値は，$U(r^*) = -\epsilon$ である．また，遠方で，$U(r=\infty)=0$ であることから，振動が起きるための条件は，$\underline{-\epsilon < E < 0}$ である[c]．

3-3:問題分にあるように，平衡点近くの振動はポテンシャル関数を二次関数近似すれば，ばねの式と同じになることを利用する．ポテンシャルの二回微分は，

$$U''(r) = 24\epsilon\sigma^2\left(26\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{14} - 7\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{8}\right)$$

となるので，テーラー展開の式から平衡点周辺でのポテンシャルは，

$$U(r) = -\epsilon + \frac{1}{2!}U''(r^*)(r-r^*)^2 + O\left((r-r^*)^3\right) \tag{2}$$

となる．ここで $U''(r^*) = 72\times 2^{-1/3}\epsilon\sigma^2$ であり，この式は，ばね定数を $U''(r^*)$ としたときのばねのポテンシャルと同じである．よって，周期は，(ばねでの周期を思い出して)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(r^*)}}$$

である．

3-4:さて，前問ではポテンシャルを平衡点の回りの二次関数としたために平衡点に対して左右対称であったが，問題の LJ ポテンシャルはそうではない．その効果を採り入れるには，あるいはより正確に周期を計算するには，さらに次の項を採り入れる必要がある．一般にポテンシャルが与えられたときに，エネルギー E は $E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r)$ であるから，

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}(E-U(r)) \implies dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} \tag{3}$$

となる．これを積分することで，周期 T を

$$T(E) = 2\int_{t_1}^{t_2} dt = 2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} \tag{4}$$

[b]平衡点とは力がつり合ってるところのことである．結果として，$U'(r)=0$ になる．

[c]E を運動エネルギーと解釈している例があった．$E=$ 運動エネルギー+ポテンシャルエネルギーである．

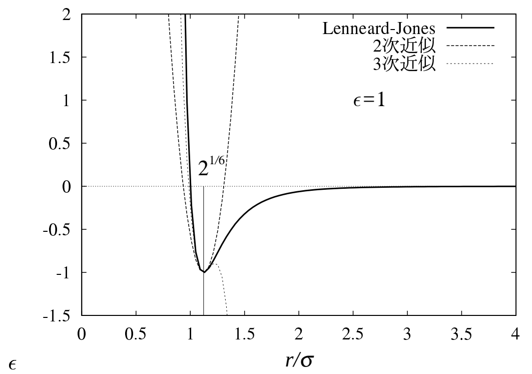


図 1: Lenneard–Jones Potential with $\epsilon = 1$: 太線が LJ ポテンシャルで，太点線が二次曲線近似で，細点線が三次近似である．

二次曲線近似の意味がよく分かっていなかったが学生がいたので，グラフを書いてみた．振動が起こるのは平衡点 r^* の回りである．その近傍に興味があるので，ポテンシャル $U(r)$ をその近傍だけ近似したいというわけである．そこで，$r = r^*$ の回りの Taylor 展開をやってみたのが，式 (2) である．近似を上げると，段々本物に近付いていることがわかる．ただし，三次近似はすぐに三次の項が見えて負に大きくずれている．

と求めることはできる．ここで，r_1, r_2 は E に依存する転回点であり，$E = U(r_1) = U(r_2)$ を満たす．さて，前問ではばねのポテンシャルとのアナロジーで周期を求めたが，実際に，$U(r) = -e + \frac{1}{2}U''(r^*)(r - r^*)^2$ とすれば，同じ答えが出て来る．そこで，次のステップとしては，

$$U(r) = -e + \frac{1}{2}U''(r^*)(r - r^*)^2 + \frac{1}{3!}U'''(r^*)(r - r^*)^3$$

として，式 (4) の積分をすればよい．この段階でもこれを正確に実行することは難しいが，$(r - r^*)$ を小さい量と考えて，$(r - r^*)^3$ までの精度で計算することはできる (はず)．

問題 4 「保存力か」: 位置 (x, y, z) の関数として，力 (ベクトル) が次のように与えられている．保存力かどうかを調べよ．もしも保存力ならば，ポテンシャルを求めよ．

$$(a)\left(-\frac{cx}{r^3}, -\frac{cy}{r^3}, -\frac{cz}{r^3}\right), \text{ただし}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (b)(-cy, 0, 0)$$

問題の趣旨: 力が与えられたときにそれが保存力かどうかを正しく判別する．講義では証明なしに，渦無しの条件 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ かどうかを調べればよいことを説明した[d]．

(a) はクーロン力や万有引力等に見られる力の形をしている．これについて渦無し条件を確かめてみる．まず，x 成分について計算すると，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})_x &= \frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y = \frac{\partial}{\partial y}\frac{cz}{r^3} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{cy}{r^3} \\ &\downarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^3} = -3\frac{1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y} = -3\frac{1}{r^4}\frac{1}{2}2yr^{-1} = -\frac{3y}{r^5}\right) \\ &= -\frac{3cyz}{r^5} + \frac{3cyz}{r^5} = 0\end{aligned}$$

[d] 渦無しの条件を調べないで，仕事が経路に依らないことを示そうとしているレポートもあった．しかし，これは難しいことは講義で話した．保存力でない場合には反例を一つ示せばよいが，保存力の場合は任意の経路について経路に依存しないことを示す必要がある．これを回避するために同値な条件として，渦無しの条件がある．同値であることの証明はベクトル解析か電磁気の教科書を見て欲しい．講義の WEB ページにも簡略版の証明をのせることにする．

同様に，y, z 成分も 0 になるので，渦無し条件を満たしているから，この力は保存力である．ポテンシャルを求めてみる．無限遠で力は$\mathbf{0}$であり，保存力の仕事は経路に依らないことから，ある位置$\boldsymbol{r}$から動径方向へ伸ばした無限遠から運ぶ経路での仕事を (勝手に選んで) 考える．

$$
\begin{aligned}
-U(\boldsymbol{r}) &= \int_\infty^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \int_\infty^{\boldsymbol{r}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = -c\int_\infty^{\boldsymbol{r}} \frac{xdx + ydy + zdz}{r'^3} \\
&\downarrow \quad (r'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{とおいて}, r' \text{を} \infty \text{から} r \text{まで直線軌道に沿って線積分する.}) \\
&\downarrow \quad (r'dr' = xdx + ydy + zdz) \\
&= -c\int_\infty^{r} \frac{r'dr'}{r'^3} = -c\int_\infty^{r} \frac{dr'}{r'^2} = \frac{c}{r}
\end{aligned}
$$

これがポテンシャルである[e].

(b) については，$\nabla \times \boldsymbol{F}$ を調べてみると，$\mathbf{0}$にはならないので，これは保存力ではない．

問題 5 「エネルギー保存マシーン?」： 2 つの質量 $(M \gg m)$ の異なるボールを図のように縦に並べて落下させると，地面に落下後，上側の軽いボールは思ったよりもかなり高く跳ね上がる．この原理を力学の知識で解説せよ．また，跳ね上がった高さを予想せよ．

問題の趣旨： エネルギー保存則をやったので，それに関連したおもちゃをゆっくり考えてみようということである．じっくり考えて，他人を納得させる説明をする訓練だと思ってもいいかもしれない[f].

案１：エネルギー保存則説

ボールは簡単のために質点で近似するとする．最初に 2 つのボールを高さ h まで持ち上げたとすると，このときの力学的エネルギーは，$(M+m)gh$ である．最終状態として，軽いボールだけが跳ね上がりある高さ H に達すると，エネルギーは mgH であるから，エネルギー保存より，H は

$$(M+m)gh = mgH \Longrightarrow H = \left(1 + \frac{M}{m}\right)h$$

となり，h よりも高く跳ね上がったことになる．これは重いボールのエネルギーを軽い方へすべて移行していることになる．果して，そんなことができるだろうか?[g] 地面に着

[e] 実はこのような多変数関数の積分はまだ習っていなかったりするのか... 線積分のところでも説明したように，経路を決めないと線積分はできない．このあたりの誤解から余計な係数が出ている解答例があった．まず，簡単なチェックは逆方向を試してみることである．つまり，$-\nabla U(\boldsymbol{r})$ が力になっているかどうかを調べる．失敗していれば同じにならない．

[f] 論破する訓練といえばディベートをあるが，それはどうみても理系には馴染まないと思う．相手を論破するではなくて，納得させられるくらいの説得力をもって物事が理解できるかどうかが重要である．友人同士での議論でも，時に立ち止まって，真実に近付いているかどうかを確認されたい．

[g]「重いボールのエネルギーを軽いボールに渡す」というのは都合が良すぎることがある．実際にどのような過程でそれが実現しているかをよく考えてみるべきである．ヒーロー・ヒロインものでさえ，ピンチになったときの「みんなの〇〇エナジーをリーダー (大抵レッド) に集めるのだ!ビ—」という作戦では，(きっと) 電磁波を使っている (はずな) のである．これは笑いごとではない．俗にいうエセ科学系のフリーエナジー等のニセ永久機関ではこうしたエネルギー保存則の乱用が多い．

地前後では，位置エネルギーを全て運動エネルギーに変換している．そこでは，着地前は $v_M=\sqrt{2gh}, v_m=\sqrt{2gh}$ であり，着地後は $v'_M=0, v'_m=\sqrt{2g(1+M/m)h}$ となっている．これはどのような衝突が起こって実現するだろうか．エネルギーが保存するので，床とボール，ボール間の衝突は完全弾性衝突だろう．そうすると，まず床と重いボールが衝突して，ボールが同じ速さで跳ね返る．そして，ボール間の衝突が起こる．そのときに，運動量の変換は，

$$Mv_M - mv_m = (M-m)\sqrt{2gh} \neq m\sqrt{2gh(1+M/m)}$$

となり，これは運動量が保存していない．運動量の保存則はかなり一般的に成り立つので，これが破れるのは問題である．逆に重いボールには運動エネルギーを与えず，運動量保存則から v'_m を決めることもできる．今度はエネルギー保存則が破れてしまう．それもまずい．

案 2：段階衝突説

そこで，先のような過程で，運動量保存則と跳ね返り係数[h]による衝突を考えて，跳ね上がる速度を求めてみる．

まず，重いボールが床と衝突する．その時の跳ね返り係数を e，衝突後の速度を V_M とすると， $V_M=-e\sqrt{2gh}$ である．その後に落ちて来た軽いボールと衝突すると考える．ボール間の跳ね返り係数を e'，鉛直上向きを正として，

$$\begin{aligned} \text{運動量保存} &: \; MV_M - mv_m = MV'_M + mv'_m \\ \text{跳ね返りの式} &: \; V_M + v_m = -\frac{1}{e'}(V'_M - v'_m) \end{aligned} \tag{5}$$

となる．これを解くと，

$$\begin{aligned} v'_m &= \frac{1}{M+m}\left((1+e')MV_M + (e'M-m)v_m\right) \\ &= = \frac{1}{M+m}\left((1+e')eM\sqrt{2gh} + (e'M-m)\sqrt{2gh}\right) \\ &= = \frac{\sqrt{2gh}}{M+m}\left((1+e')eM + (e'M-m)\right) \end{aligned}$$

となり，跳ね上がる高さ

$$H = v'^2_m/2g = h\frac{\left((1+e')eM + (e'M-m)\right)^2}{(M+m)^2} = h\frac{\left((1+e')e + (e'-m/M)\right)^2}{(1+m/M)^2}$$

[h]講義で，高校の時に扱うけど，大学の力学で歯切れが悪くなることの一つとして，摩擦の話しをあげた．保存力でない例としては必ず出て来るが，摩擦力の起源についての言及はほとんどない．あまりよく理解されていないということがその理由だと思う．もう一つ，あまり触れられないのが，この跳ね返り係数である．跳ね返り係数もその起源は難しい．高校の時には跳ね返り係数は 1 以下であると暗に思われて来たが，内部自由度を考えることで， 1 を越えることはある．

簡単な極限として，$m/M = 0$ とする．跳ね返り係数を $e = e' = 1$ とする．そうすると，$H = 9h$ となり，かなり (猛烈に) 飛び上がっている[i]．実際には，$e = 0.4$，$e' = 0.6$ 程度[j]とすれば，$H/h = (1 + 0.6 + 0.24)^2 \sim 3.4$ となる．よい程度だろうか．

上の式は高さについての予想である．予想が正しいかどうかは，その帰結を実験的に検証したり，予想の際の仮定や仮説の妥当性を検討する必要がある．まずは高さの実測値と予想の検討，それから，跳ね返り係数を別に測定して，検証されるべきであろう．さらに，本当に順番に衝突が起きているのかは確かめたくなるだろう[k]．

問題 6 「講義について」: 講義に関する感想・意見・要望はないか?

いろいろとありがとうございました．

---

[i]案 1 では H は無限大になってしまう．極端な状況にもっていくことは物理ではよくやることであり，そこで何が起きるかを考えることは大事である．

[j]これらは個々に実験すれば求めることができる．

[k]ちょっと考えると都合よすぎる気がしないでもない．例えば，重いボールの半径の方が大きいから，空気抵抗が大きく，落下の途中で衝突が起きていそうである．この結果として，すき間があくのかもしれない．などなど...