ノート (電磁気 A)
福島孝治 (東大院総合文化)
ver. 1.0: 2004.12.24

第二回物理学 A レポート問題 解答例

問題 1 「クーロン場の発散」: 原点 0 にある電荷 q の点電荷が位置$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ につくるクーロン電場

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{1}$$

について，以下の性質を示せ．

1. 原点以外で発散がゼロになっていること，すなわち，$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$.
2. 原点以外で回転がゼロになっていること，すなわち，$\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$.

クーロン電場の場合の性質をチェックする過程で，ベクトル演算の練習[1] をしようというのが，この問題の趣旨．式どおりできれば，示すことができる．

発散

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}E_x+\frac{\partial}{\partial y}E_y+\frac{\partial}{\partial z}E_z \\
&\downarrow\ \frac{\partial}{\partial x}E_x=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (\Leftarrow r^2=x^2+y^2+z^2) \\
&\downarrow\ =\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{x(-3/2)2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2-3x^2}{r^5} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0
\end{aligned}$$

原点 $r=0$ 以外ではゼロになっていることが示された[2].

回転: x 成分について書き下してみる．

$$\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{E})_x &= \frac{\partial}{\partial y}Ez-\frac{\partial}{\partial z}Ey=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{-3yz}{r^5}-\frac{-3yz}{r^5}\right)=0
\end{aligned}$$

[1] **ベクトル**=スカラーのような式変形がいくつか見受けられた．いつでもどんな量を計算しているのかを意識してほしいところだ．一つの策は，ベクトル量はいつでも**太字**で書くのはどうだろうか．ベクトルの成分はスカラーなので太字では書きたくない．この提案はあくまでも個人の趣味なので，それに従う必要はない．

[2] ガウスの法則との関係はどうなっているのだろうか?

y, z 成分も同様である．ここでも，原点では発散しているが，それ以外ではゼロになっていることが示された．

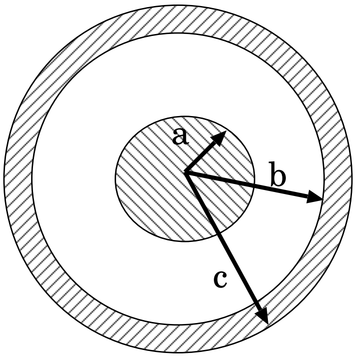
この物理的な意味はどうだろうか．ストークスの定理

$$\int dS\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\oint_C d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}$$

から，閉曲面の沿って線積分した量がゼロであることが分かる．この事実から，電場は渦無し場と呼ばれる．また，これは，(単位電荷当たりの) 仕事が経路に依らなく，保存場であることがわかる．

問題 2「導体系にガウスの法則を使う」:

前回のアルミでくるんだ半径 a のピンポン玉に電荷 $Q(>0)$ を与え，その外側を右図のように**導体球殻**(内径 $b(>a)$, 外径 c) で囲んだ．導体球殻の内側は絶縁体の膜があり，ピンポン玉の電荷は球殻には移動できないとする．



1. 図のように，この導体球と導体球殻を同心に置いた場合の**電場**を求めよ．
2. その場合の電位を求め，グラフに図示せよ．
3. 導体球の中心が導体球殻の中心からずれた場合はどうなるかを理由を含めて説明せよ．
4. 導体球殻に電荷 $q(>0)$ を与えたときに，どうなるかを理由とともに説明せよ．
5. 同じように電荷 q が帯電された導体球殻が沢山あり，その中の一つだけに上の電荷を帯びた導体球 (ピンポン玉) が入っているとする．導体球殻は透明でなく，中は透けて見えない．このとき，どの導体球殻に導体球が入っているかを見つける方法を示せ．

この問題の趣旨はガウスの法則の使い方の練習と導体の性質を考えることである．

1. まずは，対称性の考察をしてみる[3]．球全体に一様に分布しているので，電荷分布は球対称である．どの方向から見ても同じようにみえるわけである．また，球の中心を原点として，そこからの距離にしか依存しない．それゆえに，電場も球対称であり，電場は**動径成分** $E_r(\boldsymbol{r})$[4] **しかない**．導体中に電場は存在しないという導体の性質[5]とガウスの法則を用いて E_r を求めてみる．

---

[3] ガウスの法則はスカラーの方程式なので，必ず一つの成分しか決定できないことに注意しよう．

[4] これはベクトル場である電場 $\boldsymbol{E}$ の動径成分なのでスカラーである．その成分として，添字 $_r$ をつけた．引数の $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルを表しており，球の中心を原点にとっておく．

[5] 講義でも言ったが,「導体中に電場は存在しない」という文章はちょっと抵抗感がある．存在しないわけはないからね．本当に存在しないのならば，電流がなぜ流れるかわからんよね．

いま，閉曲面として，同心の半径 r の球を考える．その球面上では電場はどこでも放射上，すなわち球面と**垂直方向**であり，大きさは一定である．そこで，ガウスの法則を当てはめてみる．左辺は,

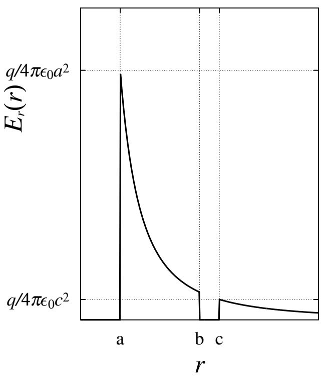
$$\int_{\text{半径 } r \text{ の球面}} dS\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = \int_{\text{半径 } r \text{ の球面}} dSE_r = E_r 4\pi r^2$$

となる．一方で，右辺は半径 r の内部にある総電荷量になるので，電荷分布がどのようなになっているかが問題になる．導体球殻には 2 つの表面がある．一つは外側面，もう一つは内側面である．どちらも球表面なので，導体球と同様に電荷は一様に分布する．その電荷量は，導体球殻内部に閉曲面を考えて，ガウスの法則を当てはめることによりわかる．内側面にある総電荷量を q' とし，導体内部に電場がないこと $(E_r = 0)$ を考えると，ガウスの法則から $0 = Q + q'$ がわかる．Q は導体球の持っている電荷であるが，内側に誘起される電荷量は $q' = -Q$ である．導体球殻には電荷が与えられていなかったので，内側面に $-Q$ の電荷が誘起されたとしたら，外側面には Q が出てきているはずである．つまり，**導体球殻には内側面に電荷量 $-Q$ が，外側面には Q がそれぞれ一様に分布している．**

まとめると，以下のように場合分けられる．

$$\int_{\text{球}} dV\frac{\rho}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{for} \quad a \le r \le b, r \ge c \\ 0 & \text{for} \quad r \ge a, a \ge r \ge b \end{cases}$$

これより，電場 $\boldsymbol{E}$ は動径成分しかなく，その大きさは,



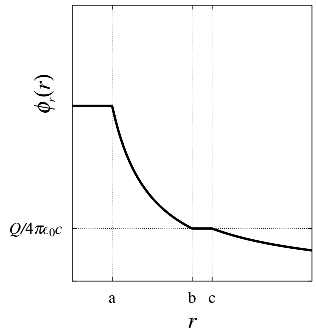
$$E_r = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for} \quad r \ge c \\ 0 & \text{for} \quad b \le r \le c \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{for} \quad a < r \le b \\ 0 & \text{for} \quad r \ge a \end{cases} \tag{2}$$

となる．結局，導体球 (球殻) の部分は電場はないが，それ以外の部分は，点電荷 q が原点にあるときと同じ電場ができる．

2. 電位は無限遠を基準として，積分[6]すればよい．

[6] $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ より，どのような経路を取っても構わないので，一番簡単な経路を選ぶ．それはまっすぐ無限遠に向かう経路．

$$
\phi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{for} \quad r \geq c \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} & \text{for} \quad b \leq r \leq c \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & \text{for} \quad a \leq r \leq b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & \text{for} \quad r \leq a \end{cases} \tag{3}
$$



となる． 導体の内部では電位は一定となっている．

3. 中心からずれたときに，何が起きるかを考えてみる．まず，線電場の問題を考える．ガウスの法則を当てはめたときに，導体球殻やその外側に閉曲面を考えた議論にはまったく変更を受けない．つまり，導体球の位置に依存せずに，導体球殻の内側面には**全体で**$-Q$ の電荷が誘起される．また，導体球殻の外側から見るとまったく変化がない．しかし，導体球殻内側面での電荷分布は球の位置に依存して様子が変わる．ずれた方向に負電荷が多く貯まる．その詳細は講義の範囲を越えるので省略する (ずるい?!)．このことはガウスの法則 (積分形) からはわからない[7]．つぎに，導体球が可動であることを考える．同心の位置に置かれていれば球と球殻の間に働くクーロン引力はつり合っているが，少しでもずれればその限りではなく，引力が働くことになる．球殻の内側壁の間を跳ね返り，周期運動をすることになるだろう．

4. 導体球殻に電荷を与えた場合を考える．ほとんど 2．での議論と同じである．導体球と導体球殻を同心に置けば，導体球殻よりも内側では 1．2．と同じ電場ができ，導体球殻の内側にはやはり，$-Q$ の電荷が誘起される．一方で，導体球殻は今 $+q$ の電荷を持っているので，外側面には全体で $q+Q$ の電荷を持つことになる．よって，外から見れば，$q+Q$ の電荷が中心に置かれているのと全くを同じように見える．

5. 外から見れば，単に電荷が変わっているように見えるだけなので，それを区別すればよい．もう一つの電荷を持ってきて，引力の違いをみてみるとか，流水の近くに持ってきて曲がり方の違いをみるとか…

   「ふってみればよい」… 確かにそうだが，世の中には触れられないものは沢山ある[8]ので，触れなくても分かることは重要である．

[7] これ以上のことは実際の計算をやってみていないので，不明．誰か答えが分かった教えて．

[8] 見えないくらいに小さいものから，宇宙の向こうのものから…

ガウスの法則と渦無しの法則から... 静電場の法則は，ガウスの法則 ($\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\epsilon_0$) と渦無しの法則 ($\nabla\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$) で表すことができる．この二つからクーロンの法則は出てくるのか？

講義では大急ぎでしゃべったところなので，ノートにまとめておく．問題は,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0 \tag{4}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

これらからクーロンの法則が出てくるか，あるいは，$\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$ が決まるか，というのが問いである．少し難しい問題なので，以下では簡便版の答えを示すことにする．まず，知りたい変数が 3 つで，決めるべき条件式が 4 つあるようにみえる．そうだとすれば，条件が多すぎるような気がするが，2 つの式を合わせると $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ となり，条件は一つ減っているので，ちょうど 3 つの自由度が残っている．

さて，式 (5) から，ポテンシャル ϕ を定義できることは講義で示した．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

そして，このポテンシャルを式 (5) に代入することで，ポテンシャルの満たすべき方程式 (ラプラス方程式) が

$$\nabla\cdot(-\nabla\phi(\boldsymbol{x})) = -\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\epsilon_0} \tag{7}$$

出てくる．この方程式の特解が，クーロン電位になると話して，それを確かめることを宿題にしておいた[9]．ここではそれを具体的に示してみる．クーロン電位は,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\,\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{8}$$

である．これが式 (7) の解になっていることを確かめる．

$$\begin{aligned}
-\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) &= -\nabla^2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\,\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \\
&\downarrow \left(\text{ここで,}\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = -\nabla\cdot\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} = \nabla'\cdot\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3x'\rho(\boldsymbol{x}')\underline{\nabla'\cdot\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}} \\
&\downarrow \text{ また，下線部はレポート 2-1 で示したように,}\boldsymbol{x}'\neq\boldsymbol{x}\text{では } 0 \text{ である．} \\
&\downarrow \text{ 積分に寄与があるのは,}\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}\text{ だけなので，その}\boldsymbol{x}\text{近傍の半径 } a \text{ の積分を考える．}
\end{aligned}$$

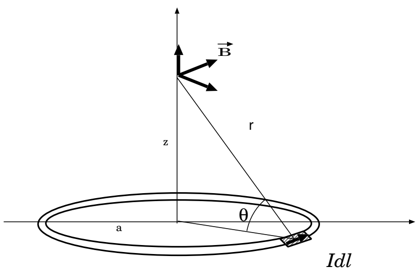
[9] これを解くには技術がいるが，確かめることは比較的容易である．

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{\boldsymbol{x}\text{' 近傍の微小球}} d^3x'\nabla'\cdot\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \\
&\downarrow \quad \text{ガウスの定理と立体角の計算をすると,} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})\int_{\boldsymbol{x}\text{' 近傍の微小球面}} dS'\boldsymbol{n}\cdot\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\boldsymbol{x})(-4\pi a^2)\frac{a}{a^3} = \frac{\rho(\boldsymbol{x})}{\epsilon_0}
\end{aligned} \tag{9}
$$

このポテンシャルから電場を求めると，クーロンの法則になります．後は，これが無限遠で 0 になる条件を加えて，唯一の解であることを示せばよいですね．それはみなさんやってみましょう．

環状電流の作る磁場

半径 a の円電流 I が中心軸上にて円の中心から z の距離にあるに作る磁場を求める (一般の位置での磁場を求めるのはちょっと難しい．できなくはない．)．対称性から，軸上における $\boldsymbol{B}$ の方向は軸方向になる．軸に垂直方向は円の軸対称の位置の電流要素が作る磁場と完全にキャンセルする．図のように，電流要素から観測位置へのベクトルと環状電流の流れている面との角度を θ として，磁場の z 軸方向の成分を B_z とすると，



$$
\begin{aligned}
B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{Idl}{r^2}r\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta \\
&\downarrow \quad (\cos\theta = a/r) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{aIdl}{r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

となる．

実は，もう少し計算を進めると，この環状電流の作る磁場が電気双極子モーメントの作る電場と同じであることが分かる．ここではその一端に振れることにする．環状電流のつくる面積は，$S=\pi a^2$ であり，$a \ll z$ の条件では，

$$
\begin{aligned}
B_z &\simeq \frac{\mu_0 IS}{2\pi z^3} \\
\mu_0 &\leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \\
\boldsymbol{m} = \frac{S}{2}\boldsymbol{e}_z = \frac{\pi a^2 I}{2} &\leftrightarrow \boldsymbol{p} = 2aq\boldsymbol{e}_z.
\end{aligned}
$$

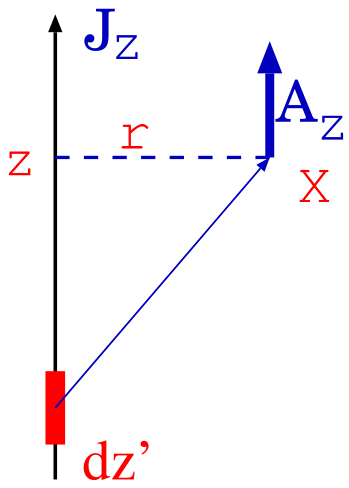
環状電流と磁気双極子 (小さい磁石) はそれら作る磁場が同じという意味で等価である．電気双極子の場合に正負の電荷が別々に考えられたのと対称的に，磁石の素がこの環状

電流だとすれば，N 極 S 極はバラバラには取り出せない (気がする).

$\boxed{\text{直線電流の作る磁場をベクトルポテンシャル経由で求めてみる。}}$

ベクトルポテンシャルの一般解は、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \tag{10}$$



で与えられる。直線電流を z 軸上にとることにすると、J_x,J_y は 0 となり、ただちに $A_x = A_y = 0$ となることがわかる。求めるべき $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の z 成分は、電流の大きさを I として、

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \tag{11}$$

であるが、この積分は次元を見てもすぐ予想できるように log 発散する。そこで、カットオフをつけて計算しておく。

最終的には磁場 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を知りたいのであって、そのようなカットオフ[10]は磁場には寄与しない (とうれしい)。カットオフを l^* として、

$$\begin{aligned}
A_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l^*}^{l^*} dz' \frac{1}{\sqrt{r^2+(z-z')^2}} \\
&\downarrow \left(\text{不定積分} \int dx \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(\sqrt{(a^2+x^2)}+x\right) \text{を使う}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[\frac{\sqrt{r^2+(z+l^*)^2}+(z+l^*)}{\sqrt{r^2+(z-l^*)^2}+(z-l^*)}\right] \\
&\downarrow\ l^* \gg 1, z/l^* \text{で展開すると} \\
&\downarrow\ \sqrt{r^2+(z\pm l^*)^2} = l^*\sqrt{(1\pm z/l^*)^2} + \frac{r^2}{l^*} \simeq l^* \pm z + \frac{r^2}{2l^*} \\
&\simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi}\ln\left[4\frac{l^{*2}}{r^2}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[2\ln\frac{1}{r} + \ln(4l^{*2})\right]
\end{aligned} \tag{12}$$

やはり、第二項は、$l^* \to \infty$ で log 発散を与える。しかし、磁場の計算には寄与せずに、重要な項は、

$$A'_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r \tag{13}$$

であり、磁場は

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \ = \ \left(\frac{\partial}{\partial y}A'_z, -\frac{\partial}{\partial x}A'_z, 0\right)$$

[10]積分の上限を有限に止めて計算をする.

$$= \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{y}{r^2}, -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x}{r^2}, 0\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{e}_r}{r}, \tag{14}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{e}_r = (x/r, y/r, 0)$ で動径方向の単位ベクトル。