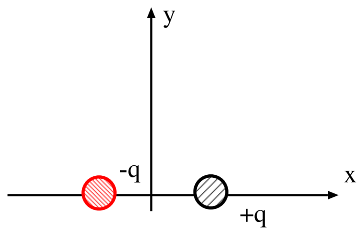
第一回物理学 A レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成 16 年 10 月 29 日: ver. 1.0

問題 1 「2 つの異なる電荷のつくるクーロン電場」: 右図のように，正電荷 q と負電荷 $-q$ を距離 a だけ離して x 軸上に置く．この 2 つの電荷が作る電場を考える．

1. y 軸上で，原点から距離 y の点にある位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．$y \gg a$ であると仮定して求めよ．
2. x 軸上で，原点から距離 x の点にある位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．$x \gg a$ であると仮定して求めよ．
3. * 2 つの電荷から十分に離れた位置における電場$\boldsymbol{E}$を求めよ．



問題 2：「球対称な電荷の作る電場」: 半径 a の球面上に一様な面電荷密度 σ で分布している球殻の作る電場を考える．特に，球殻の内側と外側に分けて考えること．

1. 周囲をアルミホイルでくるんだピンポン玉がある．ピンポン玉の中は空洞である．最初，このピンポン玉は電荷を帯びていないとする．どのようにすれば，上記のように表面に一様な電荷分布をもった球ができるか．その方法とそのために必要な道具を提案せよ．
2. 球殻の内部に電場はないことを示せ．
3. 球殻の外部の電場を求めよ．

問題 3 「講義について」: この講義に期待していることは何か？また，講義への要望等があれば自由に記せ．

捕捉：*印は少し難しいかもしれない問題なので，深入りしなくてもよい．

レポート提出に際して

ルール：

1. A4 レポート用紙で作成し，枚数制限はしないが，片面にのみ記載されていること．
2. レポートの冒頭に**氏名**と**学籍番号**，それからレポート作成の時に一緒に悩んだ**共同研究者名**を明記のこと．
3. **締め切りは 2 週間後の講義の終了時**
4. 提出先は，16 号館 221A 室 (の部屋の前のポスト)，あるいは講義終了時に．

レポート問題の返却： 赤を入れて返します．Teaching Assistant 制度を利用して，大学院生の中島君が赤を入れてくれます．その後で，福島が見て，コメントを追加します．

レポートは共同作業でもいいのかな… よい．普段から友人と議論して，講義で分らなかったことを話をしたりするのは大変有意義なことなので，レポートもその範疇に入ると考える．レポートは試験では無いのだから，何も一人ぼっちで悩むことはない．沢山議論した結果を個人個人でうまくまとめて欲しい．レポートの解答まで共同作業では困る．ましてや，レポ対作成解答例を移してもあんまり「得」はないと心得よ．総合評価に対するレポートの比率はかなり低いので，そのことを考えると,「悩むことなく作成されたレポート」などほとんど何の役にも立たない．むしろ，紙の無駄，作成する時間や採点する時間の無駄であり，お互いの不幸しかもたらさない．

レポートは手紙と同じ と思って，提出する時には自分でよく読み直して，意味が通っているかよく確認して欲しい．他人が読むとすぐに混乱するようなレポートは困る．また，ありがちな混乱の原因として,

1. 式変形
$$f(x) = \int dx g(x, x') \tag{1}$$
のように x で積分しているのに，左辺が x の関数になっていたり，右辺は x' の関数なのに，左辺はそうでないなどの間違いは，読み返すとそのおかしいところにすぐに気づくはず.

2. 電場はベクトル場 (磁場も) であるので，大きさと方向，向きがあることを常に気にしておくべきである… 電場を求めるということは，どっちの方向に，どちら向きに，どれだけの大きさ，を明らかにすることであって，どれか欠けても不完全である．

3. ベクトル=スカラー??? 計算の途中で**ベクトル**=スカラーという変形がたびたび見受けられる．例えば,
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2} \tag{2}$$
等である。これはあり得ないので、よくチェックするように。慣例的にベクトルは太字 $\boldsymbol{E}$ で、スカラーは普通に E と書くことが多い。

「式で表すこと」と「絵で描いてみること」 中学生にもわかるように説明するには絵で描いてみせることが大事で、本当に理解できていると、式など使わずに絵で描けるはず。一方で、だれにも正確に情報を伝えるには数学で記述する必要がある。どちらも、大事だということ。レポート問題でも出てきた結果は一度はグラフや絵に描いてみるともっとよくわかることがある。

計算ノート (力学 (金))
福島孝治 (東京大学院総合文化)
2004 年 9 月 29 日: ver. 1.0

- not so Frequently Asked Questions -

宿題 「水素原子でのクーロン力の強さ」: 水素原子中で，電子と陽子間に働くクーロン力と万有引力の大きさの比を求めてみよう．以下の数値を用いてよい．

電子の電荷	$1.6 \times 10^{-19} C$
真空の誘電率 ϵ_0	$8.9 \times 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$
万有引力定数 G	$6.7 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$
電子の質量 m_e	$9.1 \times 10^{-31} kg$
陽子の質量 m_p	$1.7 \times 10^{-27} kg$

問題の意図はクーロン力の強さを見てみようということです．単純に数値を入れれば答えは出てきます．古典的力学の範囲では，水素原子は陽子の回りを回転していると考えます．二つの距離を r とすると，クーロン力は,

$$
\text{クーロン力} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},
$$

であり，万有引力は,

$$
\text{万有引力} = G\frac{m_p m_e}{r^2}
$$

となる．その比は，それぞれ数値を入れれば,

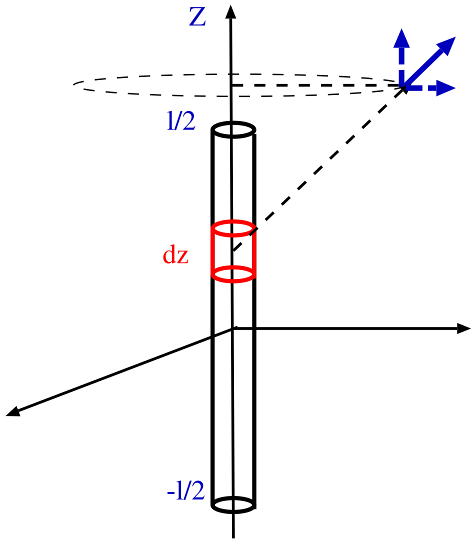
$$
\frac{\text{クーロン力}}{\text{万有引力}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{Gm_p m_e} \simeq 2.2 \times 10^{39} \simeq \frac{1}{4.5 \times 10^{40}} \tag{3}
$$

となり，クーロン力が圧倒的に大きいことがわかる．かなり大きな値なので，逆に実感は沸きません．また，このような比較がいいのかどうかもよくわかりません．似たような問題として，地球は太陽の回りを公転していますが，ここでは万有引力と遠心力がつり合っています．この公転半径を，万有引力を無くして，クーロン力と遠心力から実現されていると考えたときに，どの位電荷を持たせればよいかを考えてみましょう．そして，それは素電荷何個分でしょうか? それは 10 円玉の中にある電子の数と比べてどうか?

対称性のよい電荷分布の作る電場の例

1．直線電荷の作る電場[1]

右図のように，長さ l の直線上に一様な線密度 λ で分布している電荷の作る電場を求める．ここでは，円柱座標系を用いるとよい．線要素 dz の持つ電荷 λdz が位置 (ρ, ϕ, z) に作るクーロン場を $-l/2$ から $l/2$ まで重ね合わせればよい．電場の動径方向，角度方向，鉛直方向の成分をそれぞれ E_ρ, E_ϕ, E_z とする．クーロン場の性質より，$E_\phi = 0$ となることがわかるので，残りの 2 つをそれぞれ求めることにする．



動径成分：E_ρ

$$
\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2} dz' \frac{\lambda(\rho - 0)}{(\rho^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \\
&\downarrow \quad (z - z' = \xi \quad \text{と置く.}) \\
&= \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{1}{(\rho^2+\xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda\rho}{4\pi\epsilon_0} \left.\frac{\xi}{\rho^2(\rho^2+\xi^2)^{1/2}}\right|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\left[\frac{z+l/2}{\sqrt{\rho^2+(z+l/2)^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{\rho^2+(z-l/2)^2}}\right] \qquad (4)
\end{aligned}
$$

この積分はチェックしておこう．

鉛直成分：E_z

$$
\begin{aligned}
E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2} dz' \lambda \frac{z-z'}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z-l/2}^{z+l/2} d\xi \frac{\xi}{(\rho^2+\xi^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left.\left(-\frac{1}{(\rho^2+\xi^2)^{1/2}}\right)\right|_{z-l/2}^{z+l/2} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+l/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-l/2)^2}}\right] \qquad (5)
\end{aligned}
$$

チェック 1． l が小さい極限 $(l \to 0)$ の時に，電荷分布は点電荷のようにみえるはずである．そうなることを確かめよ．もっとも，式 (4)，(5) 中の l を 0 と置いてはどちらも 0 になってしまう．どうする?

チェック 2． 線が無限に長い場合は以下のようになる．

$$E_z = 0 \qquad (6)$$

$$E_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \qquad (7)$$

[1] ここは講義で話した部分のノート

2．一様平面電荷の作る電場

平面の一様電荷分布を σ として，ある観測位置$\boldsymbol{x}$での電場$\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int_S dS' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|^2}\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'}|} \tag{8}$$

となる．平板は無限に広がっている場合について考察する．

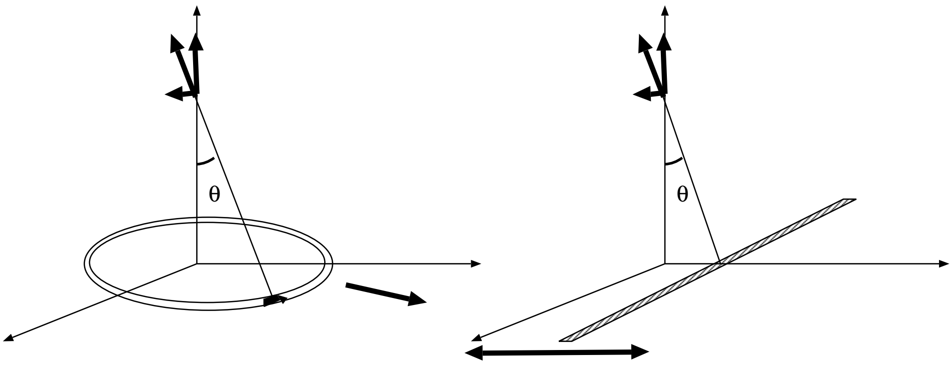


図 1: 平面を分割する方法

解法１

ここで，積分は平面について行うわけだが，幾つかのやり方がある．ほとんどの教科書にのっている、おそらくもっとも簡単にできるのは円環分割であろう．観測点から電荷平面に垂直に下ろした点を原点として，半径 r の円環から来る電場を考える (図左)．対称性から，平面に水平成分はない．円環上のある部分からの水平方向の電場は，円環のちょうど反対側から反対方向の電場が同じ大きさであるから，キャンセルする．結果として，垂直成分 (z 方向とする) のみ考えればよい．円環上の電荷は $2\pi r\sigma$ であり，電場の大きさは,

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty dr 2\pi r\sigma \frac{1}{z^2+r^2}\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}} \\ &\downarrow \int dr \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(z^2+r^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\left[-(z^2+r^2)^{-1/2}\right]_0^\infty \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|} \end{aligned} \tag{9}$$

となる。答えは、

$$\boldsymbol{E} = \left(0, 0, \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{z}}{|\boldsymbol{z}|} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\boldsymbol{e}_z \tag{10}$$

$\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトル。

解法２

前項では無限に長い直線電荷の作る電場を計算した．ここでは，平面を無限に長い直線の集まりだと考える (図右)．線密度 ρ としてときに、直線電荷の作る電場は、その動径方向だけで、直線との距離 r でけで表せる：

$$E_r^{\text{直線}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \tag{11}$$

線密度と面密度の関係は、$\rho = \sigma dx$ である。

$$\begin{aligned} E_z(\boldsymbol{x}) &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x^2+z^2)^{1/2}}\cos\theta \\ &\downarrow \quad \cos\theta = \frac{z}{(x^2+z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+z^2} \end{aligned} \tag{12}$$

この積分をどうしようか。複素積分の知識を使うと、$x = iz$ の極の留数を拾えばよい。[2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+z^2} = 2\pi i \lim_{x\to iz}(x-iz)\frac{1}{x^2+z^2} = 2\pi i \lim_{x\to iz}\frac{1}{x+iz} = \frac{\pi}{|z|} \tag{13}$$

これで $E_z = \frac{\sigma}{2\pi}$ が得られる。

チェック 3． 上の結果を使えば，平行平板コンデンサーの中の電場どのようになっているかがわかる．すなわち，２枚の大きな平板にそれぞれ電荷 q,$-q$ を帯電させて，距離 d だけ離しておく．その場合の電場を考察せよ．

3．球対称な電荷の作る電場

これはレポート問題にする．

[2] あるいは、arctan で書くか?