第三回物理学 A レポート問題 解答例

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)
平成 17 年 1 月 21 日: ver. 1.0

問題 1 「コンデンサーをつないだとき…」: 無限遠に対する電位が ϕ_1，ϕ_2，静電容量が C_1，C_2 である 2 個の導体が十分離れて置いてある．これらを細い針金でつないだ．

1. このときに，針金を流れる電流はどちら向きで，流れる電荷量はいくらか?
2. 最終状態における導体の電位を求めよ．
3. 針金でつなぐ前後でのエネルギーの変化を求めよ．また，このことはエネルギー保存則とどのような関係になっているかを説明せよ．

この問題の趣旨は，導体コンデンサーの性質を通じて，電位と電荷の動きを理解することがである．

まず，静電容量が C_1 と C_2 のコンデンサーの接続前の電荷量をそれぞれ Q_1，Q_2 とする．接続後にそれらは Q_1' と Q_2' に変化したとする．電荷の保存より，$Q_1+Q_2=Q_1'+Q_2'$ であり，電荷の移動量を Δ とすると，それを用いて $Q_1'=Q_1-\Delta$，$Q_2'=Q_2+\Delta$ と表せる．ここで Δ はコンデンサー 1 から 2 への電荷の移動を正の方向としている．

接続後は，2 つの導体は 1 つの導体になりことから，電位は一定になる．その電位を ϕ' は，接続後の電荷量と容量を用いて，

$$\phi' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_1-\Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{Q_2+\Delta}{C_2} = \phi_2 + \frac{\Delta}{C_2}$$

と表せる．この式を Δ について解けば，

$$\Delta = (\phi_1-\phi_2)/\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) = \frac{C_1+C_2}{C_1C_2}(\phi_1-\phi_2)$$

となる．$\phi_1 \geq \phi_2$ の場合は，$\Delta \geq 0$ となり，電荷は 1 から 2 へ移動し，逆に $\phi_1 \leq \phi_2$ の場合は 2 から 1 へ移動する．いずれの場合も，**電位の高い方から低い方へ電荷は移動している**ことがわかる．

また，その時の電位は，

$$\phi' = \phi_1 - \frac{\Delta}{C_1} = \phi_1 - \frac{C_2}{C_1+C_2}(\phi_1-\phi_2) = \frac{C_1\phi_1+C_2\phi_2}{C_1+C_2}$$

である．

さて，この導体の静電エネルギーを考えてみよう．電荷を Q，電位を ϕ としたときに，静電エネルギーは $\frac{1}{2}Q\phi$ で与えられる．この問題の 2 つの導体の接続前後でのエネルギーを計算してみる．接続前は，

$$E_{\text{前}} = \frac{1}{2}Q_1\phi_1 + \frac{1}{2}Q_2\phi_2 = \frac{1}{2}\left(C_1\phi_1^2 + C_2\phi_2^2\right)$$

であり，一方で接続後のエネルギーは，

$$E_{後} = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)\phi' = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)\frac{C_1\phi_1 + C_2\phi_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2}\frac{(C_1\phi_1 + C_2\phi_2)^2}{C_1 + C_2}$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{後} - E_{前} = \frac{1}{2}\left(\frac{(C_1\phi_1 + C_2\phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1\phi_1^2 - C_2\phi_2^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(\phi_1 - \phi_2)^2$$

である．その差を計算してみると，

$$E_{後} - E_{前} = \frac{1}{2}\left(\frac{(C_1\phi_1 + C_2\phi_2)^2}{C_1 + C_2} - C_1\phi_1^2 - C_2\phi_2^2\right) = -\frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}(\phi_1 - \phi_2)^2$$

となる．つまり，**接続後は必ずエネルギーはいつでも減る**ことがわかった[1]．エネルギーが下がらない場合は，接続前の電位差が無い場合で，その時は電荷は移動しない．

さて，減ってしまったエネルギーはどこへ行ってしまったのだろうか？これは電荷の運動エネルギーに変わったわけだが，普通は導体の中を電流が流れる時に格子との散乱によりジュール熱が発生して逃げてしまう[2]．

---

[1]エネルギーが減るのは自然な方向なので当たり前だとするレポートがあった．もしも，エネルギーなる量を定義しているのであれば，ちゃんと計算して見せないと話しにならないと思う．そもそもその「自然な方向」とは何のことだろうか?「エネルギーが低い状態というのは，安定な状態である.」と「安定な状態に系は移行する」では説明できていないと思う．安定な状態とは... エネルギーが低い状態... では議論がグルグル回っているだけである．講義では，高校の物理の公式の羅列の中でどの位のことが物理の議論で出て来るのか，あるいはお互いはどのように絡まっているのかを示して来たつもりであった．こういうウルトラ C を無批判に信じないために... だが...

さて，上では実際に計算して，エネルギーが下がることを示した．その「自然な方向」が計算して示されたわけだ．我々の考察の外から自然の方向として，エネルギーが下がることを考えなくても，すでに我々の考察のどこかにその性質が入っていたことになる．それはどこだろうか? ここで，質問を投げ出してもよいのだが，もう少しだけ議論しよう．導体の性質は，**導体中では等電位になるように電荷が分布する**であった．ここでは針金でくっつけることで，一つの導体になったわけだが，この導体の中で等電位になるように電荷の配置換えが起こった．この等電位への移行がエネルギーを低くすることと関係しているわけである．一般的に，**「静電エネルギーを最小にするような電荷の配置は，その電位を一定にする配置である」**ことが証明できる．ある閉じた空間で，任意の適当な電荷分布 ρ' に対する電位 ψ と等電位 ϕ を与える電荷分布 ρ の静電エネルギーを比べると，後者がいつも小さい，すなわち最小を与えることが示せる．これは宿題にしよう．示すべきは，

$$U' - U \equiv \frac{\epsilon_0}{2}\int dV\,(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\psi})^2 - \frac{\epsilon_0}{2}\int dV\,(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi})^2 \geq 0$$

である (Green の定理を使う)．

レポートでは 3．の解答の際に，このエネルギー最小を要請することで求めているものがあった．接続後のエネルギーは，U_b の式の電荷を q'_A, q'_B にすればよく，全電荷量 $q'_A + q'_B = q_{tot}$ は定数であることに注意すると，

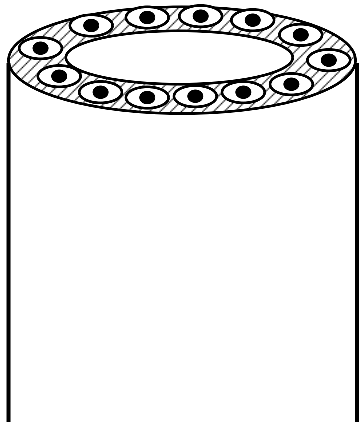
$$U_b(q'_A) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{q'^2_A}{a} + 2\frac{q'_A q'_B}{b} + \frac{q'^2_B}{b}\right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\left(\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)q'^2_A + \frac{q^2_{tot}}{b}\right)$$

となる．これを q'_A を変数とした時に，$q'_A = 0$ が最小を与える．

[2]ここでも，ジュール熱として逃げるのでエネルギーが下がるという，逆の説明はまずい．散乱が起きない，つまり電気抵抗のない超伝導体で作られた針金の場合にはエネルギーが逃げないことになってしまうが，これはウソなことは上の計算が示している．電気抵抗があれば，そこでエネルギーを開放してしまうが，超伝導体でつないだ場合は，電荷は安定に静止することができなくて，振動をくり返すことになる．それでもエネルギーは開放されるが，それはアドバンスな電磁気で議論するだろう．

問題 2 「アンペールの法則の応用例」:

半径 a の円筒面を軸方向に一様に流れる電流の作る磁場をアンペールの法則を用いて求めよ．特に，円筒の内側と外側の両方を求めよ．また，解答だけでなく，その考え方，思考過程も説明せよ．



この問題の趣旨はアンペールの法則の応用である．何から何が示されるかを，すき間がないように議論する訓練のつもりだったが，アンペールの法則を使って答えを書くだけのレポートが多かった[3]．

ビオーサバールの法則から，各電流要素から作られる磁場の z 成分はない[4]．よって，電流に垂直な成分しかないが，一方で，右図にあるように動径成分は電流の密度の対称性からキャンセルされる．つまり，磁場は回転成分 B_ϕ しかないことがわかる．しかも，その大きさは原点からの距離だけに依存している．この議論は円筒の外側だけでなくて，内側でも成り立つ．その成分を求めるためにアンペールの法則を用いる．

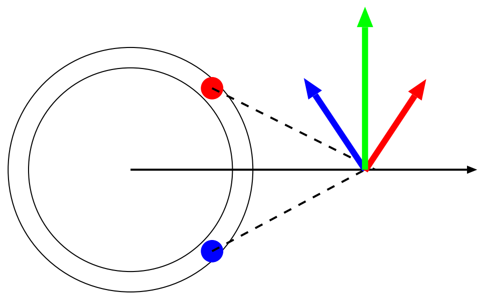


図 1: 電流分布を真上から見た図．電流分布のある要素がつくる磁場とその電流要素と線対称の位置にある電流要素の作る磁場を重ね合わせると，動径成分はキャンセルする．

アンペールの法則の積分形は，適当な閉曲面に対して

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{x} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{J}$$

となる．閉曲線として，円筒と同心の半径 r の円を考える[5]．左辺は，$2\pi r B_\phi$ となり，一

[3] レポートにもコメントしたが，答え合わせがしたいだけなら，レポートにすることはない．個々の問題を解くに際して，何がどこまで言えるのかをよく考えることで，答えを得る過程をしっかり身に着けて欲しし，それが未知の問題に対する対処の仕方を鍛えることになると考えている．世の中はほとんど未知の問題ばかりだということを認識して欲しい．

[4] この問題で磁場の z 成分が無い理由はビオーサバールの法則を見ないとわからない (はず)．と思っていたが，電流が貫かない「たて」方向にループを考えて，アンペールの法則を使うとわかるか?．

[5] そうすれば，線積分の線要素との内積は回転成分 B_ϕ だけ考えればよくて，しかも，それは円の半径だけに依存するので，積分は簡単にできる．

方で右辺は r の大きさに依存して決まる．

$$
\text{右辺} = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < a \\ \mu_0 I & \text{for} \quad r < a \end{cases}
$$

ここで，全電流を I とした．まとめると，磁場は右ねじが回る方向であり，その大きさは，

$$
B_\phi = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad r < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{for} \quad r < a \end{cases}
$$

となる．

> **問題 3「直線電流間に働く力」:** 互いに距離 r だけ平行に離れている二本の無限に長い導線にそれぞれ電流 I_1，I_2 が流れている．以下の問について，答えだけでなく，思考過程についても説明せよ．
>
> 1. 電流 I_1 の導線が作る磁場を求めよ．
> 2. 導線間に働く単位長さ当たりの力を求めよ．

この問題の趣旨は，2 つの電流にはそれぞれ力が働くこととその力はビオーサバールの法則とローレンツ力の二段階で理解できることの確認である．

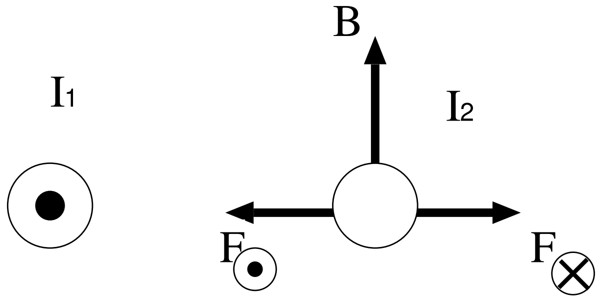
3-1 まず電流が磁場を作り，その磁場を次の電流がローレンツ力を介して感じるという順番で話しを進める[6]．この最初の設問では一本の電流の作る磁場をまず求める．この問題は講義で説明したので，答えだけ示すことにする．磁場の方向は，右ネジを巻く方向で，その大きさはアンペールの法則を使って求めることが出来る．今，電流に垂直な面上に半径 r の円に沿った磁場の線積分を考えると，その成分 B_ψ は，

$$
\int_{\text{円}\, r} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{x} = 2\pi r B_\psi = \mu_0 I_1, \rightarrow B_\psi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}
$$

と求まる．

3-2 さて，電流 I_1 の磁場を I_2 が感じる力はローレンツ力で与えられる．

[6] これは，クーロンの法則から電場の導入した議論と似ている．二つの電荷があったときに，まず一番目の電荷が電場を作り，二番目の電荷がその電場を感じる．さて，引力や斥力のような力の方向は，電荷の負号で決まっていたが，電流の場合はどうだろうか?



二本の電流を上から見た図．$\boldsymbol{B}$は電流 I_1 が作った磁場である．

磁場$\boldsymbol{B}$中に電流 (動いている電荷)$\boldsymbol{I}(=q\boldsymbol{v})$ が受ける単位長さ当たりのローレンツ力は $d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$ となり，この問題の場合その大 きさは

$$dF_{21}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

となる．また，左図のように，その向きは I_2 が I_1 と平行の場合は引力に，反平行の場合は斥力になる．この力が作用反作用の法則に従っていることは，逆のプロセスを順に考えて，同じ大きさの逆向きの力が働いていることを示せばよい．確かにそうなっているであろう．

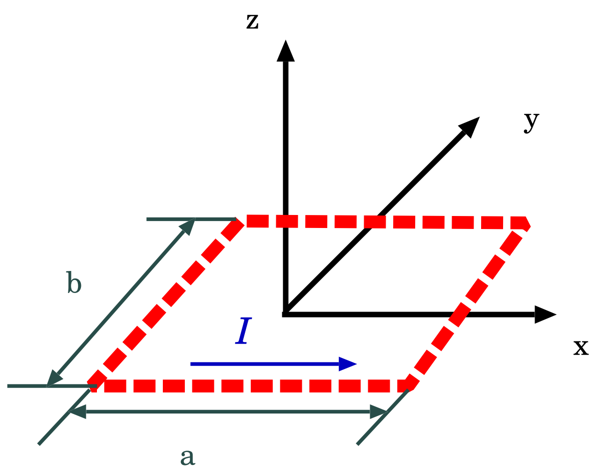
さて，平行と反平行の中間はどうなるだろうか．例えば I_1 と I_2 が直角[7]に並べると，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{I}_2$ が平行になってしまうので，力は働かない．この実験事実はアンペールによって発見され，アンペール力[8]とも呼ばれている．

今回も最後に感想や最終講義に関する要望を書いてもらいました．それらへのコメントは WEB に載せたいと思います．

環状電流の作る磁場: 再び

右図のような小さなループ電流が作る磁場が電気双極子が作る電場と同じ形になることを示す． 電流 I は xy 平面に流れているとする．ここではベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$から磁場を求めることにする．まず，z 方向への電流密度はないので，$A_z=0$ である．ベクトルポテンシャルの x 成分は，

$$A_x(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int dx'dy'dz'\frac{J_x(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$$



であり，x 方向に流れている電流は x 軸に平行な 2 箇所ある．ループから十分離れている位置$\boldsymbol{x}$から見ると，x 座標依存性は無視できるくらい小さいと考える．このとき，電流の位置は，$(0,-b/2,0)$ に+方向，$(0,d/2,0)$ にマイナス方向の電流が長さ a だけ流れている．

[7]直角にもいろいろある．ここでは直角でかつ二本の最近距離が r になるように並べたとしよう．

[8]たくさんの力が出てきて，混乱の元かも知れないが，これは歴史的な経緯を述べていると考えて欲しい．あくまでも，現代的にはビオーサバールによる磁場とローレンツ力による解釈が一般的である．

$$
\begin{aligned}
A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dx' \frac{I}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{a}{(x^2+(y+b/2)^2+z^2)^{1/2}} - \frac{a}{(x^2+(y-b/2)^2+z^2)^{1/2}}\right] \\
&\downarrow \quad b \gg r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\
&\downarrow \quad \Longrightarrow (x^2+(y\pm b/2)^2+z^2)^{-1/2} \simeq (x^2+y^2+z^2 \pm by)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{by}{2r^2}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{r}\left(\left(1-\frac{by}{2r^2}\right)-\left(1+\frac{by}{2r^2}\right)\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{aby}{r^3} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

となる．同様に，

$$
A_y(\boldsymbol{x}) \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{abx}{r^3}
$$

であり，まとめると，

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} \simeq \left(-\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{aby}{r^3}, \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{abx}{r^3}, 0\right).
$$

ここで磁気モーメント，$\boldsymbol{m} = Iab\boldsymbol{e}_z$ と定義する．$\boldsymbol{e}_z$ は z 方向の単位ベクトルとする．これを用いると，

$$
\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{r^3}
$$

と書くことができる．磁場$\boldsymbol{B}$は，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ から計算できる．

$$
\begin{aligned}
B_x &= -\frac{\partial}{\partial z}A_y = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3xz}{r^5} \\
B_y &= \frac{\partial}{\partial z}A_x = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{3yz}{r^5} \\
B_z &= \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x = -\frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}-\left(\frac{3yz}{r^5}\right)\right) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

これらは，電気双極子のモーメントと同じである．つまり，磁石は非常に小さいループ電流を重ね合わせてみると見ることができるだろう．