

第1回統計熱力学レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

平成16年10月29日 y: ver. 1.0

問題1 「コイン投げ問題」:

コインを無作為に投げて、表がでるか裏がでるかは $1/2$ の確率であるとする。同じ種類のコインを同時に N 枚投げたとする。

1. N 枚投げたコインのうち n 枚が表になる確率 $P_N(n)$ を求めよ。
2. N が大きいたして、スターリングの公式を用いて、もっともらしい枚数を求めよ。
3. 確率 $P_N(n)$ をもっともらしい値から2次までのテイラー展開をすることにより、 $P_N(n)$ がガウス関数になることを示せ。
4. ガウス積分の公式

$$I \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha(x-\beta)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (1)$$

を以下のように示す。ただし、 $\alpha > 0$ とする。

(a) 極座標に変数変換することで、

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha(x-\beta)^2} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\alpha(x-\beta)^2 - \alpha(y-\beta)^2} \quad (2)$$

を計算せよ。

(b) ついでに、 $\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\alpha(x-\beta)^2}$ を計算せよ。ヒント、 $(\frac{d}{d\alpha} I = ??)$

5. 問い3. 確率 P を規格化定数まで求めよ。
6. その分布関数について、期待値と分散を計算せよ。
7. 実際にコインを投げてみて、比較せよ¹。

✂切は2週間後とする。

¹ N をどうするか?何回投げるか?何を比較するかは、各自設定されよ。

レポート提出に際して

ルール：

1. A4 レポート用紙で作成し，枚数制限はしないが，片面にのみ記載されていること．
2. レポートは共同作業でも行ってもよい．講義で分らなかったことを話をしたりするのは大変有意義なことなので，レポートもその範疇に入ると考える．レポートは試験では無いのだから，何も一人ぼっちで悩むことはない．沢山議論した結果を個人個人でうまくまとめて欲しい．レポートの解答まで共同作業では困る．
3. レポートの冒頭に氏名と学籍番号，それからレポート作成の時に一緒に悩んだ共同研究者名を明記のこと．
4. 提出先は，16 号館 221A 室，あるいは講義終了時に．
5. レポート問題の返却： 赤を入れて返します．