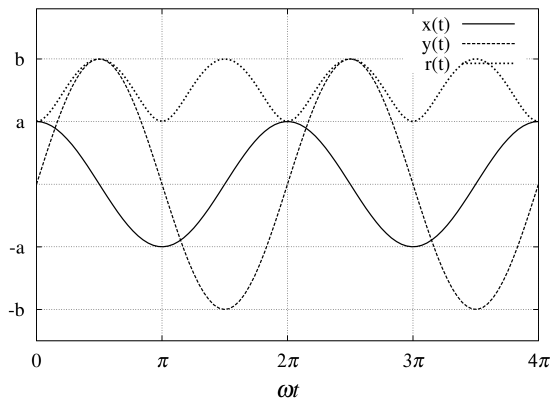
練習問題の解答例

福島孝治 (東大院総合文化)

ver. 1.0: 2005. 5. 2
ver. 1.2: 2005. 5. 6
ver. 1.3: 2005. 5.14, ver. 1.4: 2005. 5. 16

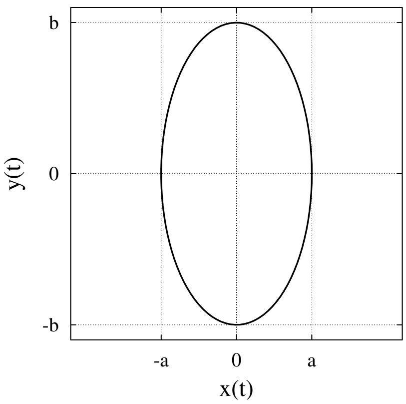
問 1.1-1

z 成分はなので，運動は xy 平面内で起こっている．時間の関数として，x 座標，y 座標をグラフに示してみる．横軸は ω を単位にとり，未定の定数 (a, b) は適当に設定することにした．



問 1.1-2

今度は，時間を媒介変数として，xy 平面上に描いてみる．上のグラフから，時々刻々の点を繋げてみると，右のように楕円になる．

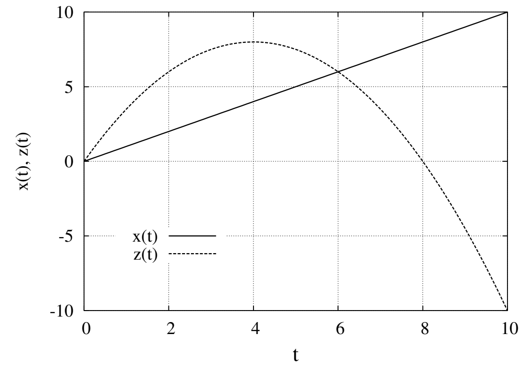


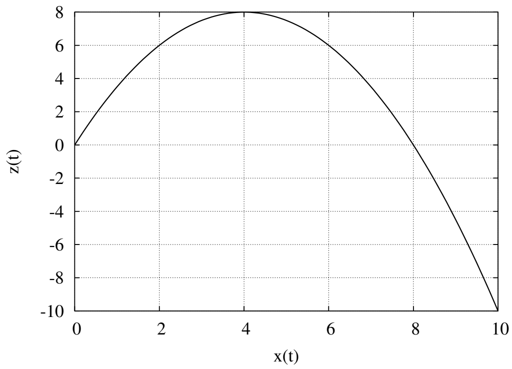
問 1.1-3 原点からの距離を $r(t)$ とすれば，

$$r(t) = \left(a^2 \cos^2(\omega t) + b^2 \sin^2(\omega t)\right)^{1/2} = \left(a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2(\omega t)\right)^{1/2}$$

となることがわかる．これは a と b の間を振動する関数である．問 1-1-1 のグラフに $r(t)$ の結果も載せておいた．この関数の周期は $x(t)$ や $y(t)$ とは異なっていることは確認しておこう．

問 1.1-4 問題文では x，と y を書くことになっていたが，正しくは y ではなくて，z 座標である．上で行ったようなグラフを描いてみる．但し，ここでは，$a = 1., b = 4., g = 1.$ とした．





どのような運動かが想像できるだろうか.

問 1.2-1 微分に関数する以下の恒等式を示せ.

1. $\frac{d}{dx}x^n = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon)^n - x^n}{\epsilon} = nx^{n-1}$
（ここで，二項定理 $(x+\epsilon)^n = x^n +_n C_1 x^{n-1}\epsilon +_n C_1 x^{n-2}\epsilon^2 + \cdots$ を用いた．）

2. (微分の合成則)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon) - f(x)g(x+\epsilon)}{\epsilon} + \frac{f(x)g(x+\epsilon) - f(x)g(x)}{\epsilon}\right) \\
&= \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)
\end{aligned}$$

3. $y'(x) = (x^n)'\frac{1}{x+1} + x^n\left(\frac{1}{x+1}\right)' = \frac{nx^{n-1}}{1+x} + x^n\frac{(-1)}{(1+x)^2} = \frac{nx^{n-1}+x^n(n-1)}{(1+x)^2}$

4. 上の微分の合成則を n 回微分に一般化すると，

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m f^{(n-m)}g^{(m)}$$

となる．ここで $f^{(m)}$ は f の x についての m 回微分を，${}_nC_m$ はコンビネーションを表す．$f(x) = x^n$, $g(x) = (1+x)^{-1}$ とすると，

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^n}{1+x} = \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m \frac{n!}{1+x}\left(\frac{-x}{1+x}\right)^m = \frac{n!}{1+x}\left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^n = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

．途中で任意の n に対して，二項定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} {}_nC_m x^m y^{n-m}$ を使っている．

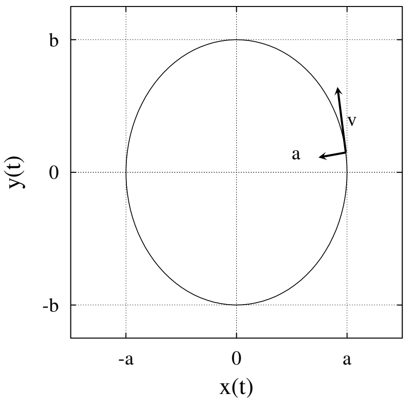
問 1.2-2

$$\boldsymbol{v} = (-a\omega\sin(\omega t), b\omega\cos(\omega t), 0)$$

問 1.3-1

$$\boldsymbol{a} = (-a\omega^2\cos(\omega t), -b\omega^2\sin(\omega t), 0)$$

ある時刻の$\boldsymbol{v}$と$\boldsymbol{a}$を右図に示しておく．



問 1.3-2

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = a^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t) - b^2\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t) = (a^2-b^2)\omega^3\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

となる．加速度ベクトルは常に原点を向いていて，速度ベクトルは楕円の接線方向を向いている．$a = b$ の場合 (円運動) は常にゼロになるので，速度と加速度は直交しているが，$a \neq b$ の場合は二倍周期で振動する．

問 1.4-1 講義で説明したように，長さと時間の次元をそれぞれ L，T とすると，[速度] $=L/T$,[加速度]$=L/T^2$ となる．

問 1.4-2 左辺と右辺の次元を勘定することにより，

$$[a] = L, \quad [b] = L/T, \quad [c] = L/T^2$$

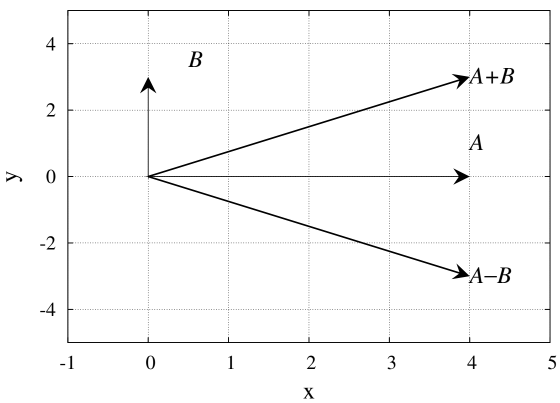
となることがわかる．例えば，位置が時間の関数として与えられたときに，それぞれの時間のベキ関数の係数は，長さ，速度，加速度の次元を持つ．

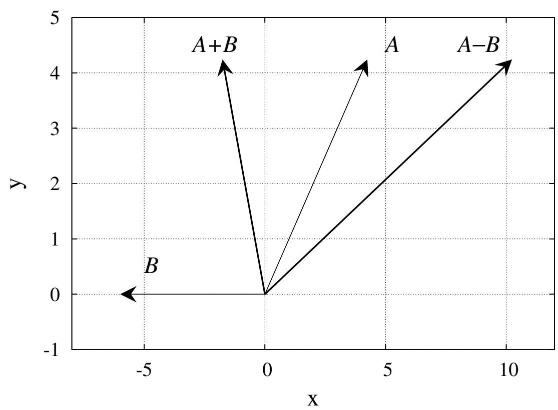
問 1.5-1

ベクトルの大きさは，共に 5.

問 1.5-2

ベクトル $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A} = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 0)$ であり，ベクトル $\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{B} = (-6, 0, 0)$．大きさはそれぞれ $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = 6(2-\sqrt{2})^{1/2}$，$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = 6(2+\sqrt{2})^{1/2}$.





問 1.5-3 3 つのベクトルが与えられている．$\boldsymbol{A} = (2,3,-4)$，$\boldsymbol{B} = (2,-2,2)$，$\boldsymbol{C} = (-1,2,1)$.

1. ベクトル$\boldsymbol{B}$の大きさは，$|\boldsymbol{B}| = \sqrt{3\times 2^2} = 2\sqrt{3}$ なので，単位ベクトルは，$\dfrac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
2. $\boldsymbol{D} = (4,1,-2)$, $\boldsymbol{E} = (2,8,-10)$ なので，$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} = 8+8+20 = 36.$
3. $\boldsymbol{D}$と$\boldsymbol{E}$の外積を求める．$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E} = (-10+16, -12+40, 32-6) = (6,28,26).$
4. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = (2,3,-4)\cdot(-6,-4,2) = -32.$