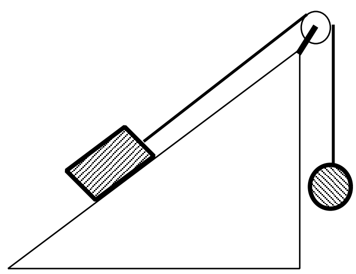
練習問題 2

福島孝治 (東大院総合文化)
ver. 1.0: 2005.5.12
ver. 1.1: 2005.5.13

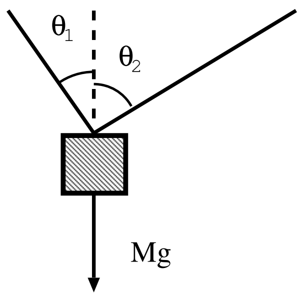
2　運動の 3 つの法則

2.1　第一の法則

問 2.1-1 図のように斜面に置かれた物体が滑車を通じてひもでおもりとつながって静止している．この物体とおもりに働く力を列挙して，力の方向を示せ．



問 2.1-2 図のように質量 M のおもりを二人で持ち上げて，静止させている．鉛直方向となす角をそれぞれ θ_1，$\theta_2 (< \theta_1)$ になっている．どちらが楽をしている?



2.2　第二の法則

問 2.2-1 重力中の質点の運動は運動方程式を解くことによって決まる．時刻 t における位置 $z(t)$ は，鉛直上向きを正の方向として，$t = 0$ での位置を z_0，速度を v_0 とすると，

$$z(t) = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

と表される．ここで g は重力加速度である．

1. v_0 を正にする (つまり，上向きに投げ上げた) と，最高到達点を求めよ．
2. また，このとき，再び $t = 0$ の位置 z_0 に戻って来たときの速度を求めよ．
3. 位置と速度を時間の関数として，グラフに描け．上の結果はグラフから理解できるか?

問 2.2-2 上の式を利用して，実際に重力加速度 g を測ってみよう．

問 2.2-3 西武の松坂のフォークがどのくらい落ちるのかを大雑把に見積もってみる．フォークボールはボールの回転がほとんどないので，回転による効果はなく，ほぼ自由落下と考えて良いとされている[2]．

1. 初速度 135km/h で投げられたボールが等速直線運動しているとすると，17m 離れたキャッチャーのミットに到着するまで何秒かかる?
2. その時間の間，鉛直方向には落下運動したとすると，どのくらい落ちるだろうか．重力加速度は 9.8m/s^2 とする．

2.3 質量と力の次元

問 2.3-1 振り子の周期 T(振り子が振れて戻って来るまでの**時間**) は，$T = 2\pi\sqrt{l/g}$ となる[3]．ただし，l は振り子の**長さ**であり，g は重力**加速度**である．この式が次元として正しいことを示せ．

問 2.3-2 距離 r だけ離れた質量が M と m である二つの物体[4]に働く万有引力 F は

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

で表される[5]．定数 G の次元を求めよ．

問 2.3-3 力積の次元を求めよ．

2.4 第三の法則と運動量保存則

問 2.4-1 身の回りで運動量が保存していることがわかる現象をあげよ．

問 2.4-2 静止しているサッカーボールを蹴っ飛ばして，30m/s の速度を与えた．ボールの質量は 0.5Kg であり，蹴る際に足に接触していた時間は 0.025 秒であった．足にかかる力はどの程度か見積もれ．

2.5 運動方程式の相似性

問 2.5-1 (過去問より) 自然長からののびに比例する復元力が働くバネがある．このバネを特撮物のロボットにつけたときに不自然に見えない条件を考える．時間と空間の縮尺を変えたときに運動方程式が不変になるための条件を述べよ．その条件の意味を解説せよ．

---

[2]流体力学の効果などさまざまな効果は本当はあるが，それでも自由落下に非常に近いことが最近わかってきている

[3]この式の理由はそのうちに講義で解説する．

[4]例えば，太陽と地球等．

[5]これも講義で説明する．

第一回物理学Bレポート問題の解答例 (途中)

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

2005. 5.12 : ver. 1.0

2005. 5.19 : ver. 1.1

問題 1 「ベクトル演算 1」:

1. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ を求めよ.
2. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ を求めよ.
3. $|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})|$ は$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$を辺とする平向6面体の体積になっていることを示せ.

問題の趣旨: この問題はとにかく手を動かしてベクトル演算になれてもらうことが趣旨でした.

1. 定義どおりに計算してみる. まず

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=(-1-4,-2-1,2-1)=(-5,-3,1)$$

であり, 求めたい式は,

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=-10-0-1=-20$$

となる.

2. これは前から計算するのが, 正しい[6].

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=(5,-5,5)\times\boldsymbol{C}=(5,0,5)$$

3. まず, ベクトル$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$を$\boldsymbol{D}$とおくと, ベクトル$\boldsymbol{D}$の方向は$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$に垂直で, 大きさはその2つのベクトルで書かれる平行四辺形の面積である. 向きは講義でも話したので, ここでは大きさ$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$について, 調べておこう. そのためには次のベクトルの公式, $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^2)$を使うとよい[7]. これを使うと,

$$|\boldsymbol{D}|=\sqrt{A^2B^2+A^2B^2\cos\theta}=AB\sin\phi$$

となることがわかる. ここでϕは$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$のなす角である. 図に書いてみるとわかるが, これはちょうど$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$でできる平行四辺形の面積に等しい.

このDと$\boldsymbol{A}$との内積は, 2つのベクトルのなす角をθとすると, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|\cos\theta$と書ける. $\boldsymbol{A}\cos\theta$は$\boldsymbol{D}$への射影であるから, 平行四辺形に対する高さである. 結局, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}$

[6] 計算してわかるとおり, $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$. 左辺について, ベクトルの方向がどちらを向いているかを考えてみる. ベクトル$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$は, $\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$に垂直な方向を向いている. 求めたいベクトル$\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{C}$はベクトル$\boldsymbol{D}$に垂直なので, 結果として$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$の2つのベクトルで張られる面に平行であることがわかる. 一方で, 右辺を考えると, $\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$で張られる面に平行である. 一般には違う方向を向いている.

[7] 証明せよ.

は平行四面体の体積であることがわかる．

問題 2 「ベクトルの微分」： 時間 t の関数である 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t)$ について，次の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}$$

問題の趣旨: この問題は微分の復習が趣旨です．
右辺の定義が左辺に等しいことを示します．先ずは左辺から，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) &= \frac{d}{dt}(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \\
&\quad \text{それぞれの項に微分の合成則をあてはめればよい} \\
&= \left(\frac{d}{dt}A_x\right)B_x + A_x\left(\frac{d}{dt}B_x\right) + \left(\frac{d}{dt}A_y\right)B_y + A_y\left(\frac{d}{dt}B_y\right) + \left(\frac{d}{dt}A_z\right)B_z + A_z\left(\frac{d}{dt}B_z\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}\right)
\end{aligned}$$

となる．

おまけ：同じような合成則はベクトル式についても成り立つ[8]．

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}\right)\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}\right)$$

この関係式は物理の問題として面白い側面を持っている．2 つのベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{A}= \boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{p}$ とする．ここで，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルであり，$\boldsymbol{p}$は運動量ベクトルである．このときに上の関係式を用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) &= \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}\right)\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}\right) \\
&\quad \text{ここで，} \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}= \frac{\boldsymbol{p}}{m} \text{ は}\boldsymbol{p}\text{に平行であり，第一項はゼロになる．} \\
&\quad \text{また，第二項に運動方程式 } \tfrac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} \text{ を用いると} \\
&= \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}
\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{F}$が$\boldsymbol{r}$に平行な力だと右辺はゼロになる．これは，運動量の保存則と似たような式になり，何か $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ なる量が時間に依存しない，つまり**保存すること**がわかる．これもある種の保存則と呼ばれる法則である．この例は講義で詳しく解説することにする．

[8]やってみよう．ただし，今度はベクトルの関係式なので，式は 3 つある．