

練習問題 3

福島孝治 (東大院総合文化)

ver. 1.0: 2005.5.27

ver. 1.1: 2005.6. 3

ver. 1.2: 2005.6. 9

3 運動方程式の解法

3.1 微分方程式のいくつかの解法

問 3.1-1 次の微分方程式を解け .

$$(1) \frac{d}{dx}y = 1+y^2, \quad (2) \frac{d}{dx}y = \frac{y^2+1}{x^2+1}, \quad (3) \frac{d}{dx}y = \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2$$

問 3.1-2 次の微分方程式を解け .

$$1. \frac{d}{dx}y = \frac{y-x+2}{y-x+4} \quad (u = y-x \text{ とおくとよい}),$$
$$2. \frac{d}{dx}y = \frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad (u = y/x)$$

問 3.1-3 次の 2 階の微分方程式を解け .

$$1. y'' + 5y' + 6y = 0$$
$$2. y'' + 2y' + 3y = 0$$
$$3. y'' + 6y' + 9y = 0$$

問 3.1-4 初期条件として, $x(t=0) = 2, x'(0) = 7$ を満たす微分方程式の解を求めよ .

$$\frac{d^2}{dt^2}x - 4\frac{d}{dt}x + 7x = 0$$

問 3.1-4 ある時刻 t における人口を x とすると, 人口の変化率 (dx/dt) を

$$\frac{d}{dt}x = -kx(x-A)$$

とする人口増減モデルを考える . ここで, k, A は時間によらない定数とする .

1. この微分方程式を解け .
2. 時間の関数として, このモデルの解をプロットしてみよ .
3. 定数 k, A が何に相当するか説明せよ .

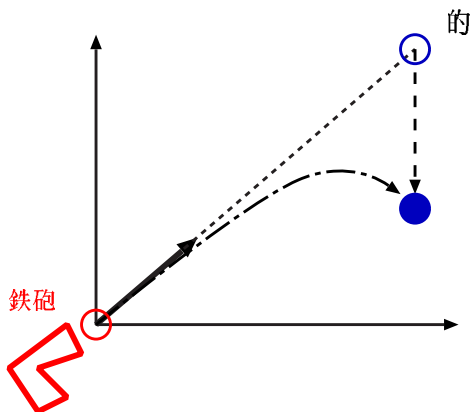


図 1:

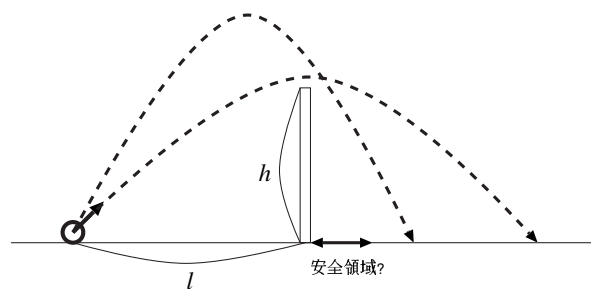


図 2:

3.2 放物運動

問 3.2-1 射的問題：図 1 のように，鉄砲は的に照準をあわせておき，的が落下すると同時に鉄砲を発射する．このとき，球の発射速度 v_0 がある条件を満たすときに，必ず命中することを示せ．またその条件が満たさないときに起きることを説明せよ．

問 3.2-2 雪合戦?：図 2 のように高さ h の壁から l だけ離れた左の位置に球を投げる人がいる．その人の能力で，球は初速度 v_0 でいつも投げることができる．ただし，方向は自由に調整できるとする．壁の右に隠れている人にとって，必ず球が到達しない領域はあるか?それはどこか?

3.3 抵抗があるときの落下運動

問 3.3-1 人が飛行機より初速 v_0 で飛び降り， t_0 秒後にパラシュートを開いた．落下中は，速度に比例した空気抵抗が働くとする．人間の抵抗係数を κ_1 ，パラシュートを開いたときの抵抗係数を κ_2 として，それぞれのときの運動方程式は，抵抗係数 κ を用いて，

$$m \frac{d^2}{dt^2} z = -mg - \kappa \left(\frac{d}{dt} z \right)$$

と表せる．時刻を t_0 前後に場合分けをして，この運動方程式を解け．但し， $t = t_0$ の時には 2 つの解は接続していること．また，速度のグラフを描いてみよ．

問 3.3-2 流体とぶつかることによって生じる抵抗力 (慣性抵抗) は，速度の二乗に比例する．そのときの落下運動の運動方程式は，

$$m \frac{d^2}{dt^2} z = -mg + k \left(\frac{d}{dt} z \right)^2 \quad (4)$$

となる． m は質点の質量， g は重力加速度， $k > 0$ は抵抗係数である．初速度を 0 として，この落下運動を調べよ．

3.4 ばねの振動

問 3.4-1 直線上を運動する質量 m の質点に，原点からの距離 x に比例する引力と，速度に比例する抵抗力が働いているとき，運動方程式は，

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -k \frac{d}{dt} x - \kappa x, \quad (k > 0, \kappa > 0)$$

となる．

1. 初期条件として， $t = 0$ のとき， $x = 0, dx/dt = v_0$ の解を求めよ．
2. 周期はどのようにになっているか？
3. 振幅はどうなっているか？

- not so Frequently Asked Questions (1)-

ある時刻 t での位置ベクトル $\mathbf{r}(t)$ と速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ から，時刻 $t + \Delta t$ での位置ベクトルは，

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \Delta t + O(\Delta t^2) \quad (5)$$

と書ける．

1. (a) $O(\Delta t^2)$ って何？
2. (b) そもそもこの式はどこからやってきた？

(a) は，大きさが Δt^2 (とそれよりも高次を含む) 項をざっくり表している．読み方は，オーダー (order) である．これは， Δt は小さいとしたときに， Δt の 1 次式のレベルで等式が成り立っていることを表したい時に用いられる．そういう意味での近似ということだが，近似だと「=」を使うことは数学的にはできないから，残りの部分を記号 O の中に全て押し込んでいて考えている．具体的な例は次にみることにしよう．

(b) 具体的に式 (1) を求めてみることにする．簡単のためにスカラー関数 $f(x)$ の $x = x_0$ 近傍の場合の展開式，

$$f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0} \epsilon + \dots$$

の出処について考える^k．ある x の区間について，一般に関数 $f(x)$ が $(x - x_0)$ の多項式で書けるとする．

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (6)$$

ここで，逐次的に $x - x_0$ の n 次の係数 a_n を求めることを考える．

^kここで，右辺第二項の $\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}$ は $f(x)$ を x で微分をとった後に $x = x_0$ を代入することを意味している．つまり， $x = x_0$ での関数 $f(x)$ の微係数のことである．簡単に $f'(x_0)$ と書くこともある．

1. $x = x_0$ と置くことで, $f(x_0) = a_0$
2. 一回微分してから $x = x_0$, $\rightarrow \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0} = f'(x_0) = a_1$
3. 同様に n 回微分してから $x = x_0$, $\rightarrow \left. \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0) = n! a_n$

これから $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots = \sum_m \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m$ とかける.

$x - x_0 \ll 1$ のとき

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

を関数 $f(x)$ の $(x-x_0)^2$ のオーダーでの近似という. これを上記の記号 O を使って,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$$

と表す. 特に $x_0 = 0$ の近傍での関数の近似の例を示す.

1. $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + \dots$
2. $\exp(ix) = 1 + (ix) + (ix)^2/2 + (ix)^3/3! + \dots = (1 - x^2/2 + x^4/4! + \dots) + i(x - x^3/3! + \dots)$
3. $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! + \dots$
4. $\sin(x) = x - x^3/3! + \dots$

これらの式が正しいかどうかを示してみよう.

また, 電卓を叩いて, 近似の各オーダーでの程度数値的に合っているかを確認してみるのはいいかもれない.

図 3: $f(x) = \cos(x)$ の場合の例を元の関数と 3 次の多項式で表した場合の式をグラフに描いてみる.

