練習問題 3 の解答例

福島孝治 (東大院総合文化)

ver. 1.0: 2005. 6.10

ver. 1.1: 2005. 6.14(赤字で修正) ver.1.2:2005.8.19

問 3.1-1　次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{d}{dx}y = 1+y^2$,　(2) $\dfrac{d}{dx}y = \dfrac{y^2+1}{x^2+1}$,　(3) $\dfrac{d}{dx}y = \left(\dfrac{y+1}{x+1}\right)^2$

これらの問題はいずれも変数分離形になっている例題である．積分定数はCとする．
(1) 変数分離の形にもっていく．

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = 1 \quad \to \quad \int dx \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = \int dx 1$$

$$\downarrow \qquad \text{変数変換をする} \left(dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) dx \right)$$

$$\int dy \frac{1}{1+y^2} = \int d(\tan t)\frac{1}{1+\tan^2 t} \quad \Rightarrow \quad \int dt \frac{1}{\cos^2 t}\frac{\cos^2 t}{1} = t = \tan^{-1} y = x + C$$

$$\underline{y = \tan(x+C)} \tag{7}$$

(2)

$$\int dy \frac{1}{1+y^2} = \int dx \frac{1}{1+x^2} \quad \to \quad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y = \tan\left(\tan^{-1} x + C\right)} \tag{8}$$

(3)

$$\int dy \frac{1}{(1+y)^2} = \int dx \frac{1}{(1+x)^2} \quad \to \quad -(1+y)^{-1} = -(1+x)^{-1} + C$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y = \frac{x + (1+x)C}{1 - C(1+x)}, \text{その他にも } y = -1} \tag{9}$$

問 3.1-2　次の微分方程式を解け.

1. $\frac{d}{dx}y = \frac{y-x+2}{y-x+4}$　($u = y - x$ とおくとよい),
2. $\frac{d}{dx}y = \frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$　($u = y/x$)

これは変数分離に帰着できるタイプの問題である．ヒントに従ってやればよい．
(1)$u = y - x$ より，$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$

$$\frac{du}{dx} + 1 = \frac{u+2}{u+4} \quad \to \quad \frac{du}{dx} = \frac{u+2}{u+4} - 1 = \frac{-2}{u+4}$$

$$\int du(u+4) = \int dx(-2) \quad \to \quad u^2/2 + 4u = -2x + C \to u^2 + 8u + 4x = C$$

$$u = -4 \pm \sqrt{16 - 4x + C} \quad \Rightarrow \quad \underline{y = x - 4 \pm 2\sqrt{4 - x + C/4}} \tag{10}$$

(2) $y = ux$ より，$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$

$$x\frac{du}{dx} + u = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = u - \sqrt{1+u^2} \quad \to \quad \frac{du}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{x}$$

$$\int du \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = -\int dx \frac{1}{x} \quad \to \quad (u = \sinh t)\ \text{とおく}^{1}$$

$$\int d(\sinh t)\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} = \int dt \cosh t \frac{1}{\cosh t} = t \qquad \sinh^{-1} u = -\log x + C$$

$$\begin{aligned} y &= x\sinh(-\log x + C) = \frac{x}{2}\left(e^{-\log x + C} - e^{+\log x - C}\right) \\ &= \frac{x}{2}\left(\frac{e^C}{x} - \frac{x}{e^C}\right) = \frac{1}{2}\left(C' - \frac{x^2}{C'}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

問 3.1-3 次の 2 階の微分方程式を解け.

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$
2. $y'' + 2y' + 3y = 0$
3. $y'' + 6y' + 9y = 0$

これらはどれも斉次方程式であり，特性方程式の方法を用いて解くことができる.
(1) 特性方程式：$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0, \to (\lambda+3)(\lambda+2) = 0, \to \lambda = -2, -3$ より，どちらも実数解であるときの一般解は,

$$y(x) = C_1\exp(-2x) + C_2\exp(-3x) \tag{12}$$

(2) 特性方程式：$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0, \to \lambda = -1 \pm i\sqrt{2}$ より，このときの一般解は,

$$y(x) = C_1\exp\left((-1+i\sqrt{2})x\right) + C_2\exp\left((-1-i\sqrt{2})x\right) = e^{-x}\left(C_1e^{+i\sqrt{2}x} + C_2e^{-i\sqrt{2}x}\right). \tag{13}$$

オイラーの公式[m]を用いると,

$$y(x) = e^{-x}\left((C_1+C_2)\cos(\sqrt{2}x) + i\,(C_1-C_2)\sin(\sqrt{2}x)\right)$$

となり，これが実数であるためには $C_1 = C_2^*$ でなくてはならない[n].
(3) 特性方程式は，$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0$ となり，重解を持つ．この時の一般解は[o],

$$y(x) = e^{-3x}\left(C_1 + C_2x\right) \tag{14}$$

[1]双曲線関数たち $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (hyperbolic cosine),$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $(\sinh x)' = \cosh x$, $\tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{(\cosh x)'}{\cosh x} = \frac{d}{dx}\log(\cosh x)$

[m]$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

[n]複素共役：実数 x, y に対して，複素数 $z = x + iy$ とすると，その複素共役 z^* は，$z^* = x - iy$ で定義される.

[o]この理由は以前のページを参照して欲しい.

となる．

問 3.1-4 初期条件として，$x(t=0)=2, x'(0)=7$ を満たす微分方程式の解を求めよ．

$$\frac{d^2}{dt^2}x - 4\frac{d}{dt}x + 7x = 0$$

特性方程式は，$\lambda^2-4\lambda+7=(\lambda-2)^2+3=0$ であり，その解は $\lambda=2\pm\sqrt{3}i$ である．一般解は，定数を C_1, C_2 として，

$$x(t) = C_1 e^{(2+\sqrt{3}i)t} + C_2 e^{(2-\sqrt{3}i)t}$$

である．初期条件を満たす条件は，

$$\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ 7 &= C_1(2+\sqrt{3}i) + C_2(2-\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

となり，解くと，$C_1=\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}i), C_2=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}i)$ である．これらは複素共役の関係があるので，$x(t)$ は実数になる．実際に代入してみると，

$$x(t) = e^{2t}\left(2\cos\left(\sqrt{3}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \tag{15}$$

となる．

問 3.1-4 ある時刻 t における人口を x とすると，人口の変化率 (dx/dt) を

$$\frac{d}{dt}x = -kx(x-A)$$

とする人口増減モデルを考える．ここで，k, A は時間によらない定数とする．

1. この微分方程式を解け．
2. 時間の関数として，このモデルの解をプロットしてみよ．
3. 定数 k, A が何に相当するか説明せよ．

この問題はある種の人口問題のモデルである．最も有名なマルサス (Malthus) の法則[p]に改良を加えたのが今回のモデルである．この微分方程式は Pearl-Read の Logistic equation と呼ばれている．

(1): さて，まずはこの微分方程式を解くことにする．この方程式は変数分離で簡単に解くことが出来る．

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\frac{1}{x(A-x)} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{A-x}\right)\frac{dx}{dt} &= k \\ \log(x)-\log(A-x) = \log\left(\frac{x}{A-x}\right) &= kAt + C \end{aligned}$$

[p]「ある生物の個体群を考え，その数を x としたときに，単位時間辺りの出生率を n，死亡率を m とすると，

$$\dot{x} = nx - mx = (n-m)x$$

と表せる．ここで $a=n-m$ をマルサス係数と呼ぶ.」

初期条件として，$x(t=0)=x_0$ とすると，

$$x(t)=\frac{Ax_0e^{kAt}}{A-x_0+x_0e^{kAt}} \tag{16}$$

となる．
(2): $A,k>0$ として，具体的に $A=50, k=0.025$ として，幾つかの初期条件に対して，グラフを書いてみた．

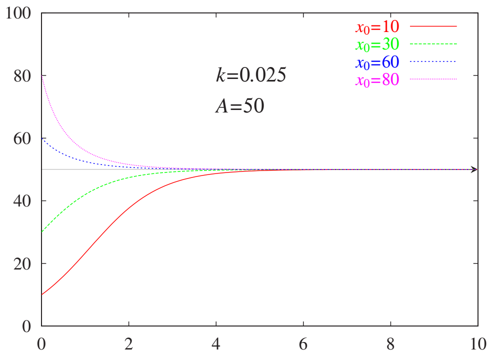

図 4: $A,k>0$ の場合:初期の値 x_0 によらず，長時間極限では A の値に収束している．

(3): $A,k>0$ の場合には，

$$x(t)=\frac{A}{1+(A/x_0-1)e^{-kAt}} \tag{17}$$

となり，この解は，長時間極限で A に収束することがわかる．つまり，A は長時間極限への収束値を意味しており，kA は収束値 A に近付く時間スケールを決めている．

$k<0$ の場合は，初期値 x_0 と A の大小関係で，$A>x_0$ ならば必ず $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$ になる「絶滅」が起き，$A<x_0$ では有限の時間 t で x が無限大になる「人口爆発」が起きる．

問 3.3-1 人が飛行機より初速 v_0 で飛び降り，t_0 秒後にパラシュートを開いた．落下中は，速度に比例した空気抵抗が働くとする．人間の抵抗係数を κ_1，パラシュートを開いたときの抵抗係数を κ_2 として，それぞれのときの運動方程式は，抵抗係数 κ を用いて，

$$m\frac{d^2}{dt^2}z=-mg-\kappa\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

と表せる．時刻を t_0 前後に場合分けをして，この運動方程式を解け．但し，$t=t_0$ の時には 2 つの解は接続していること．また，速度のグラフを描いてみよ．

この問題の趣旨は，微分方程式の初期値の取扱いと解の接続を考えることと，落下運動についてのイメージを深めることである．

既に講義で求めたように，この運動方程式の一般解は

$$z(t)=C_1+C_2\exp\left(-\frac{\kappa}{m}t\right)-\frac{mg}{\kappa}t$$

である．ここで，C_1,C_2 は未定定数である．この解を時間で一回微分して，速度を求めると，

$$v(t)=-\frac{\kappa}{m}C_2\exp\left(-\frac{\kappa}{m}t\right)-\frac{mg}{\kappa}$$

となる．

最初人間が落下するときは，抵抗係数を κ_1 として，初期条件は飛び出しの位置を $z=0$ とすると，$C_1+C_2=0$ であり，速度の初期条件から，C_2 は求まる．

$$v_0 = -\frac{\kappa_1}{m}C_2 - \frac{mg}{\kappa_1} \Rightarrow C_2 = -\frac{m}{\kappa_1}\left(v_0+\frac{mg}{\kappa_1}\right)$$

これより，$t<t_0$ での位置と速度は求まった．

$$z(t) = \frac{\kappa_1}{m}\left(v_0+\frac{mg}{\kappa_1}\right)\left(1-e^{-\frac{\kappa_1}{m}t}\right)-\frac{mg}{\kappa_1}t \tag{18}$$

$$v(t) = \left(v_0+\frac{mg}{\kappa_1}\right)e^{-\frac{\kappa_1}{m}t}-\frac{mg}{\kappa_1} \tag{19}$$

$t>t_0$ では，抵抗係数を κ_2 であり，上の式に $t=t_0$ を代入した式を初期条件として，改めて未定乗数を決定すればよい．その条件式を 2 つ書くと，

$$\begin{aligned} z(t=t_0)=C_1+C_2\exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t_0\right)-\frac{mg}{\kappa_2}t_0 &= \frac{\kappa_1}{m}\left(v_0+\frac{mg}{\kappa_1}\right)\left(1-e^{-\frac{\kappa_1}{m}t_0}\right)-\frac{mg}{\kappa_1}t_0 \\ v(t=t_0)=-\frac{\kappa_2}{m}C_2\exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t_0\right)-\frac{mg}{\kappa_2} &= \left(v_0+\frac{mg}{\kappa_1}\right)e^{-\frac{\kappa_1}{m}t_0}-\frac{mg}{\kappa_1}, \end{aligned}$$

となり，これらの式から，

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{m}{\kappa_2}\exp\left(+\frac{\kappa_2}{m}t_0\right)\left(mg\left(\frac{1}{\kappa_1}-\frac{1}{\kappa_2}\right)-\left(v_0+\frac{mg}{\kappa_1}\right)e^{-\frac{\kappa_1}{m}t_0}\right) \\ C_1 &= -C_2\exp\left(-\frac{\kappa_2}{m}t_0\right)+\frac{\kappa_1}{m}\left(v_0+\frac{mg}{\kappa_1}\right)\left(1-e^{-\frac{\kappa_1}{m}t_0}\right)-mgt_0\left(\frac{1}{\kappa_1}-\frac{1}{\kappa_2}\right) \end{aligned}$$

が求まる．速度について，陽に解を書くと，

$$v(t) = -\left(\frac{mg}{\kappa_1}\left(1-e^{-\frac{\kappa_1}{m}t_0}\right)-v_0e^{-\frac{\kappa_1}{m}t_0}\right)e^{-\frac{\kappa_2}{m}(t-t_0)}-\frac{mg}{\kappa_2}\left(1-e^{-\frac{\kappa_2}{m}(t-t_0)}\right)$$

問 3.3-2 流体とぶつかることによって生じる抵抗力 (慣性抵抗) は，速度の二乗に比例する．そのときの落下運動の運動方程式は，

$$m\frac{d^2}{dt^2}z = -mg + k\left(\frac{d}{dt}z\right)^2$$

となる．m は質点の質量，g は重力加速度，$k>0$ は抵抗係数である．初速度を 0 として，この落下運動を調べよ．

この問題の趣旨は，線形でない微分方程式の解き方と，粘性抵抗中の落下運動との違いを調べることである．

この問題では抵抗係数 $k>0$ として，落下運動に限定している[q]．この運動方程式は右辺の第二項に $v_z = dz/dt$ の**二乗**の項を含んでいて，もはや線形ではない[r]．これは非

[q] 上昇する場合は $k<0$ になる．

[r] 微分方程式の 2 つの解 z_1 と z_2 を持ってきたとき，それらの線形結合 $z=C_1z_1+C_2z_2$ もまたその解になっているときに，その方程式は線形という．

線形微分方程式である．初期条件は，時刻 $t=0$ で，位置 $z=0$，速度 $v=0$ とする． 解くべき方程式は，

$$\frac{d^2}{dt^2}z=-g+\frac{k}{m}\left(\frac{d}{dt}z\right)^2 \tag{20}$$

これは一度速度 v の満たす方程式に書き直すと，変数分離の形をしている．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}v &= -g+\frac{k}{m}v^2 && (21)\\
\int_0^v dv'\frac{1}{g-\frac{k}{m}v'^2} &= \int_0^t dt'(-1) && (22)\\
&\downarrow \quad mg/k=A^2\text{とおくと，左辺の被積分関数は，}\\
&\downarrow \quad \frac{1}{g-\frac{k}{m}v^2}=\frac{1}{\frac{k}{m}(A^2-v^2)}=\frac{m}{k}\frac{1}{2A}\left(\frac{1}{A+v}+\frac{1}{A-v}\right)\\
&\downarrow \quad \text{両辺の積分する．}\\
\frac{m}{2Ak}\left[\log(A+v')-\log(A-v')\right]\Big|_0^v &= \frac{m}{2Ak}\log\left(\frac{A+v}{A-v}\right)=-t && (23)
\end{aligned}$$

v について解く．

$$\frac{A+v}{A-v}=\exp\left[-\frac{2Ak}{m}t\right]\Longrightarrow v=-A\frac{1-\exp(-2\frac{Ak}{m}t)}{1+\exp(-2\frac{Ak}{m}t)}=-\sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right). \tag{24}$$

もう一度積分をすることで位置 z に時間発展が得られる．

$$\begin{aligned}
\int_0^z dz' &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt'\tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right).\\
z(t) &= -\sqrt{\frac{mg}{k}}\int_0^t dt'\frac{1}{\sqrt{\frac{kg}{m}}}\frac{d}{dt'}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right).\\
&= -\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t'\right)\Big|_0^t=-\frac{m}{k}\log\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right) && (25)
\end{aligned}$$

幾つかの特徴的な性質を見ておく．

終端速度: 終端速度 v^* は運動方程式 (4) の釣り合いの条件からすぐわかる．終端速度では速度の変化はもはやないので，左辺は 0 になる．これは右辺の力がつり合っていることをいみする．右辺=0 を解くことで，**末端速度の大きさ (向きは下向き)** $v^*=\sqrt{\frac{mg}{k}}$ がわかる．以下ではすぐわかることを見てみる．

特徴的な時間： 終端速度への近付き方からわかるように，この運動の特徴的な時間[s] τ は， $\tau=\sqrt{m/kg}$ になっている．

[s] **ここで特徴的な時間とは，終端速度へ近付く目安となる時間スケールのことで，例えば指数関数 ($e^{-t/\tau}$) の時に時間の次元を持つ量 τ のことである．式 (25) では，$\log\cosh(\frac{t}{\tau})$ と書いたときの τ に相当する．**

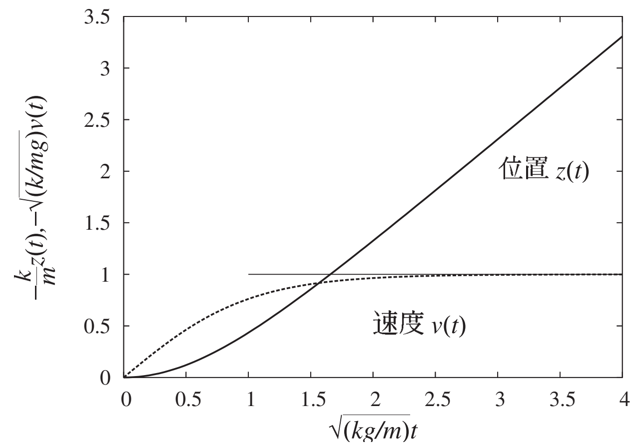

図 5: 位置と速度を時間の関数として描いてみる．縦軸と横軸は適当な変数で規格化している．

時間が長い極限 ($t \gg \tau$)**:** この極限では，$\log\cosh(\alpha t) = \log\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2} \simeq \log(\exp(\alpha t)/2) \simeq \alpha t$ なので，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\sqrt{\frac{kg}{m}}t = -v^* t \tag{26}$$

終端速度での等速運動になっていることがわかる．

時間が短い極限 ($t \ll \tau$)**:** 時間 t が小さいとして，展開する．

$$\begin{aligned} \cosh\alpha t &\simeq 1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2 + \frac{1}{4!}(\alpha t)^4 + O(t^6) \\ \log\cosh(\alpha t) &\simeq \log'\left(1 + \frac{1}{2}(\alpha t)^2\right) \simeq \frac{1}{2}\alpha^2 t^2 \end{aligned} \tag{27}$$

を使う[†]と，

$$z(t) \simeq -\frac{m}{k}\frac{1}{2}\left(\frac{kg}{m}\right)t^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{28}$$

これは自由落下を意味している．これも当たり前．初期条件は速度 0 なので，速度の二乗に比例する抵抗力は運動の初期には影響は少ない．

位置と速度の関係だけが知りたい場合はもう少し簡単になる．微分の公式から，速度の時間微分 dv/dt は，

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}v(z) = v(z)\frac{d}{dz}v(z) \tag{29}$$

となるから，この式を代入すると速度 v の微分方程式 (21) は，

$$v\frac{d}{dz}v = -g + \frac{k}{m}v^2 \tag{30}$$

[†] $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3))$

となる．この式もまた変数分離形になっているので，

$$\frac{v}{g-\frac{k}{m}v^2}dv=-dz \tag{31}$$

から積分すればよい．この先はみなさんへの宿題として残しておく．

第一回物理学 B レポート問題の解答例 (補足)

2. これは前から計算するのが，正しい．

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=(5,-5,5)\times\boldsymbol{C}=(5,0,5)$$

計算してわかるとおり，$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$. 左辺について，ベクトルの方向がどちらを向いているかを考えてみる．ベクトル $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は，$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{B}$に垂直な方向を向いている．求めたいベクトル $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{C}$ はベクトル$\boldsymbol{D}$に垂直なので，結果として $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の 2 つのベクトルで張られる面に平行であることがわかる．一方で，右辺を考えると，$\boldsymbol{B}$と$\boldsymbol{C}$で張られる面に平行である．一般には違う方向を向いている．具体的には,

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

が成り立っている．

問題 3 「力?」 以下の 2 つの問いに答えよ．

1. 凧を上げている状況を考える．凧を質点だとみなし，凧に働いている力とその方向を説明せよ．特に，空でほぼ静止しているとき，力がつり合っているようすを図に書いて説明せよ．
2. 身近な物体の運動を記述したいと考える．質点と考えて，説明できそうな例を一つ挙げて，そこに働いてる力を説明せよ．また，質点と考えると無理が生じる例を一つ挙げよ

この問題は，質点の考え方を広くもつことの練習である．
凧にどんな力が働いているかはちょっと難しいが，まずは重力と，風から受ける抗力と，凧の表と裏の圧力差から生じる揚力，それから糸が引っ張る張力である．図を書くと右のような感じ．抗力と揚力は大きさを持たない質点では考えられないが，質点という考え方は働く力を全て考慮した後の理想化した概念であることに注意しよう．