第二回物理学 B レポート問題の解答例

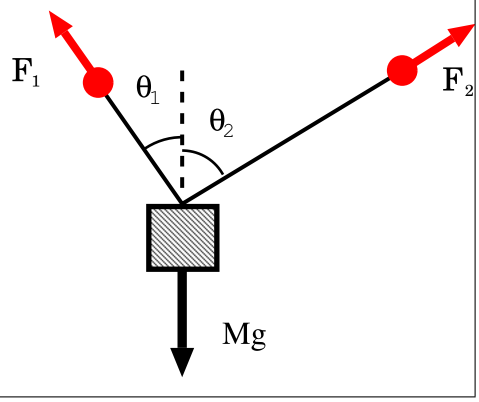
福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

ver. 1.0: 2005.06.17

問題 1:「練習問題問 2.1-2 より」 図のように質量 M のおもりを二人で持ち上げて，静止させている．鉛直方向となす角をそれぞれ θ_1, $\theta_2 (> \theta_1)$ になっている．どちらが楽をしているかをかんがえてみる．

1. 右図のようにそれぞれのヒモを引っ張る力の大きさを F_1 と F_2 とする．水平方向と垂直方向の力のつり合いの式をそれぞれ書け．

2. これらの関係式から，どちらが楽をしているかを議論せよ．



問題の趣旨: 力の分解とつり合いを正しく理解する練習である．

1. 問題文のように，力を水平方向と垂直方向に分解して，それぞれのつり合いの式を書く．

$$
\begin{aligned}
\text{水平} \quad F_1 \sin\theta_1 &= F_2 \sin\theta_2 \\
\text{垂直} \quad Mg &= F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2
\end{aligned}
$$

2. 上の条件より，

$$
\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}
$$

であり，$\theta_2 > \theta_1$ ならば，$F_1 > F_2$ となる．つまり，角度が大きい方が楽をしていることになる．

問題 2 :「練習問題問 2.4-2 より」 静止しているサッカーボールを蹴っ飛ばして，30m/s の速度を与えた．ボールの質量は 0.5Kg であり，蹴る際に足に接触していた時間は 0.025 秒であった．以下の問いに答えよ．

1. 地面に置いてあるボールを角度 30 °上方へけり上げた．ボールは一様重力中を運動する，つまり放物運動するとする．どのくらい前方へ進んだかを求めよ．

2. 足にかかる力はどの程度か見積もれ．

3. 前問の力は，日常生活でどのくらいの重さのものを持ち上げる力に相当するか考えよ．

問題の趣旨: これも，力の方向の分解を考える問題であり，さらに力の大きさやつ力積についての感覚を養う練習にもなっている．

1. 初速度の水平成分 V_{x0} と鉛直成分 V_{z0} を求めておく．

$$
\begin{aligned}
V_{x0} &= V_0 \cos\frac{\pi}{6} = 30\mathrm{m/s} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 26.0\mathrm{m/s} \\
V_{z0} &= V_0 \sin\frac{\pi}{6} = 30\mathrm{m/s} \times \frac{1}{2} = 15\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

鉛直方向の運動を考えると，地面 $(z=0)$ に置いたボールを初速 V_{z0} で蹴り上げ,時刻 t の時の位置 z は，$z = v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2$ であり，再び地面に戻って来る時間を t_1 とすると，$0 = v_{z0}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ となる．これを解き，重力加速度を $9.8\mathrm{m/s^2}$ として，

$$
t_1 = 2\frac{v_{z0}}{g} \simeq 2 \times \frac{15}{9.8}\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{m/s^2}} \simeq 3.1\mathrm{s}
$$

となる．この間に水平方向を進んだ距離 x は,

$$
x = v_{x0}t_1 \simeq 26.0 \times 3.1 = 81\mathrm{m}
$$

である．

W 杯等の標準国際試合で使用されるサッカーの競技場の大きさは，縦１０５m×横６８mとなっている．ゴールキックだとすれば，相手ゴールの近くまで飛んでいることになる．この人はプロ級であろう．

2. このキックについての力積[u]の大きさ I は,

$$
I = mV_0 - m0 = 0.5 \times 30\mathrm{Kg\ m/s} = 15\mathrm{Kg\ m/s}
$$

蹴っている途中の力のかかり具合は正確には分らないが，接触時間 Δt は短く，その間一様な力 $\bar{F}$ で蹴っていたと仮定すると，

$$
\bar{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{15}{0.025}\frac{\mathrm{Kg\ m/s}}{\mathrm{s}} = 600\mathrm{Kg\ m/s^2}
$$

3. 質量 M の物体にかかる重力は，Mg であるので，先ほどの力に相当する質量は,

$$
M = \frac{600}{9.8} \simeq 61\mathrm{Kg}
$$

である．大人の男性を抱えるくらいの力で蹴っていることがわかる．

一方で，例えば足の力が弱くて，半分くらいの力しかない選手は，倍の接触時間をかけて蹴るテクニックがあれば，同じくらいの力積，つまりは同じくらいの飛距離が出る．

[u] 力積はベクトル量であるが，ここではその大きさを求めてみる．例えば，ベクトル量として力積を求め，すなわち I_x と I_z を求めてみて，その大きさ $I = \sqrt{I_x^2 + I_z^2}$ を求めるとどうなるか?

問題 3：「放物運動」 ボールを投げ上げると，ほぼ放物運動を描く．これは，重力中の質点の運動に対する力学の法則の帰結である．ところが，上手なバスケットボールの選手がジャンプすると，空中で止まっているように見えることがある．これは一体どういうことかを考えてみよ．

この問題は，物理の法則と日常感覚をどのように考えるかという問題であった．説明が悪くて，バスケットボール選手の動きがわからなかったかもしれない．

まず，質点の運動のところで，質点は物体の重心の位置の近似であることを説明した．もっとも，まだその妥当性には全く説明されてはいない．しかし，質点の運動だと考えたときに，放物運動することは物理の法則としては正しい．

放物運動では，その頂点は鉛直方向の速度が上向きから下向きに変わるので，速度はゼロになる．これが止まって見える原因と考えるのは，ある意味では正しい．つまり，物理の法則と整合を取りながら，止まっているという意味を考えているわけである．さて，それではボールを天井に向かって無げ上げてみる．確かに頂点で止まっているように見える．しかしながら，これでは**上手な**選手の凄さではなくて，どんな選手でも同じように止まって見えることしか説明されていない．

やはり，人間の体は質点でないことを考えてみなくてはならないだろう．重心の運動は放物運動しながら，人間の体は止まって見えるということはありうるだろうか．それが，この問題のポイントだろう．普段，我々がバスケット選手を見るときに，必ずしも体の重心を見ているわけではなく，重心の位置は選手が体を変形させることで，少しは移動できるはずである．このことを利用して，頂上付近での例えば上体の位置の静止時間を延ばしているとは考えられないだろうか．

同様な現象として，バレリーアのジャンプがよく取り上げられる．優秀なバレリーナは，大きな横跳びジャンプの間で頭部の位置が放物運動ではなくて，ほぼ水平に動くという．これも重心をコントロールしている結果であろう．

練習問題 3 の解答例 (続き)

問 3.2-1 射的問題：

図 1 のように，鉄砲は的に照準をあわせておき，的が落下すると**同時**に鉄砲を発射する．このとき，球の発射速度 v_0 がある条件を満たすときに，必ず命中することを示せ．またその条件が満たさないときに起きることを説明せよ．

鉄砲の発射位置を原点 (0,0) として，的の初期位置の x 座標を x_T とする．水平面から的を見上げる角度を θ とすると，的の初期位置の y 座標 y_T は，$y_T = x_T \tan\theta$ と表される．球を発射してから，すなわち的を落下させてから，時刻 t だけ経ったときの的の位置は，$(x_T, x_T \tan\theta - \frac{1}{2}gt^2)$ である．

一方，球は的を狙って初速 v_0 で発射するので，時刻 t 後の位置 $(x_P{,}y_P)$ は，

$$\begin{aligned} x_P &= (v_0 \cos\theta)t \\ y_P &= (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = x_P \tan\theta - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

となる．球がちょうど x_T に到達したときの，y 座標について，$y_T = y_P$ になっていることがわかる．つまり，衝突することがわかる．2 ところがそもそも球が x_T に届かなければ，衝突はおこらない．$y_P > 0$ の範囲で x_T に到達する条件は，$t > 0$ であることに注意をすれば，

$$0 < v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt = v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}g\frac{v_0 g}{\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad \underline{v_0 \sin\theta > \frac{1}{2}g\frac{x_T}{v_0\cos\theta}}$$

であることがわかる．

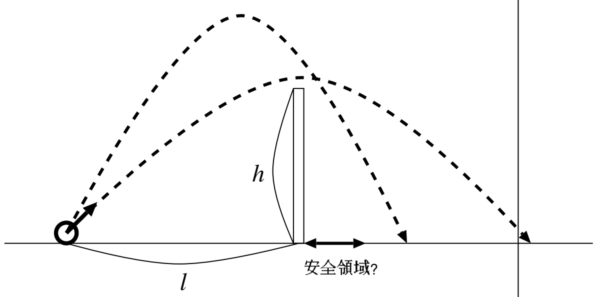
第三回物理学B レポート問題

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

ver. 1.0: 2005.06.17

問題 1: 練習問題 問 3.2-2 より 雪合戦?：

右図のように高さ h の壁から l だけ離れた左の位置に球を投げる人がいる．その人の能力で，球は初速度 v_0 でいつも投げることができる．ただし，方向は自由に調整できるとする．壁の右に隠れている人にとって，必ず球が到達しない領域はあるか?それはどこか?



問題 2：練習問題 問 3.4-1 より ：

直線上を運動する質量 m の質点に，原点からの距離 x に比例する引力と，速度に比例する抵抗力が働いているとき，運動方程式は，

$$m\frac{d^2}{dt^2}x = -k\frac{d}{dt}x - \kappa x, \qquad (k > 0, \kappa > 0)$$

となる．

1. 初期条件として，$t = 0$ のとき，$x = 0, dx/dt = v_0$ の解を求めよ．
2. 周期はどのようになっているか?
3. 振幅はどうなっているか?
4. 位置と速度を時間の関数として，描け．

問題 3 「講義について」： 何かあれば...

締め切りは 2 週間後．7 月 1 日とする．