練習問題 4

福島孝治 (東大院総合文化)
ver. 1.0: 2005.6.23

4 仕事とエネルギー

4.1 仕事と運動エネルギー

問 4.1-1：「仕事の次元」 仕事の次元を求めよ．

問 4.1-2：「斜面の落下」

右図のように水平面と角度 θ をなす斜面上の地面からの高さ h の位置に質量 m の物体が置かれている．

1. 斜面はなめらかとして，地面に到達するまでに重力が質点にする仕事を求めよ．
2. 地面からの高さ h は一定として，斜面の角度を変化させたときに，この仕事はどうなるかを答えよ．

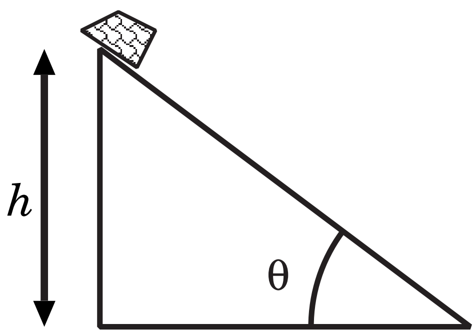


図 6:

問 4.1-3：「振り子の仕事」 振り子の運動について考える．振り子に働く力は，重力，振り子を支える糸の張力，および空気の抵抗である．以下の問に理由とともに答えよ．

1. これらのうちに，振り子に仕事をするのはどれか?
2. そのうちに常に負の仕事をするのはどれか?

問 4.1-4：「減衰振動の仕事」 練習問題 問 3.4-1 の運動で，質点に働く力のする仕事について考える．

1. 一周期の間にばねの引力がする仕事を求めよ．
2. 一周期の間に抵抗力がする仕事を求めよ．

問 4.1-5：「摩擦力のする仕事」 車輪のついた椅子を押して，これに初速 $v_0 = 2\mathrm{m/s}$ を与える．この椅子は地面との間の摩擦力を受けて減速し，やがて静止した．

一般に運動している物体に働く摩擦力は，運動方向と反対向きに大きさは垂直抗力に比例する．比例係数を動摩擦係数と呼ぶ．垂直抗力とは地面が物体を押している地面と垂直方向の力のことでである．地面と椅子の動摩擦係数は 0.8 とする．

1. 仕事と運動エネルギーの関係を使って，椅子が静止するまでに運動する距離を求めよ．
2. 初速を二倍にすると，静止する距離は何倍になるか?

4.2 保存力と力学的エネルギー保存則

問 4.2-1 次の保存力について，ポテンシャルエネルギーを求めよ．積分定数は適当に設定せよ．

1. ばねの弾性力
2. 一様な重力

問 4.2-2 原点にある質量 M の質点と位置 (x, y, z) にある質量 m の質点の間に働く万有引力のポテンシャル $U(x, y, z)$ は，万有引力定数を G として，

$$U(x, y, z) = G\frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

で与えられる．２つの質点間働く力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を求めよ．

問 4.2-3 エネルギー保存則の別の証明を考える．質量 m の質点の速度を $\boldsymbol{v}$ として，位置$\boldsymbol{x}$でのポテンシャルエネルギーを $U(\boldsymbol{x})$ とする．この質点の力学的エネルギー E は,

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U(\boldsymbol{x})$$

とする．このとき，力学的エネルギー保存則，すなわち，$\frac{d}{dt}E = 0$ を示せ.

問 4.2-4 速度に比例する抵抗がある場合の落下運動を考える．簡単のために，鉛直方向の運動しか考えないとする．初速度 $v_0 = 0$ とする．

1. 時刻 t での質点の運動エネルギー $K(t)$ を求めよ．
2. 時刻 t での重力による位置エネルギーを $U(t)$ を求めよ．
3. 時刻 t までに，抵抗力がした仕事 $W(t)$ を求めよ．
4. これらの間に成り立つ関係式を考えよ．

問 4.2-5：**「５個球振り子」** 講義で見せた５つ玉の振り子で，3 つの球を持ち上げたときに，衝突後にはやはり 3 つの球が飛び出した．どうして止まっていた 2 つだけが飛び出さないのだろうか？衝突に際して力学的エネルギーは保存しているとし，さらに運動量保存則を考慮して，この現象を考察せよ．

問 4.2-6：**「球面からの飛び出し」**

右図のように半径 R の半円の頂点の位置から質量 m の質点を初速度 0 で滑り出したとき，半円のどの位置で円から離れるかを考えてみる．半円から離れる条件は，垂直抗力が 0 になることである．

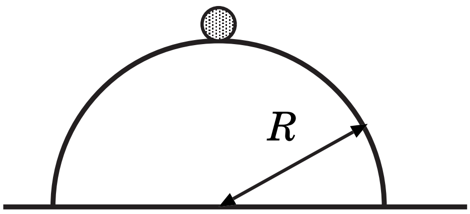


図 7:

1. この質点の運動方程式を書け (ヒント：振り子の運動方程式を参考にせよ).
2. この質点の力学的エネルギー保存則の関係を書き下せ.
3. 上の二つの式より，半円から離れる場所を求めよ.

問 4.2-7：「ジェットコースター」

図 8 のような摩擦のないジェットコースターを考えよう．点 A から質量 500Kg のジェットコースターを初速 0 で出発させる．

1. 点 B および，点 C での速度を求めよ.
2. 点 A から点 C まで運動するときの，重力のする仕事を求めよ.
3. ループの頂点 D は点 A と同じ高さに位置している．ジェットコースターはこの点を無事に通過できるか?

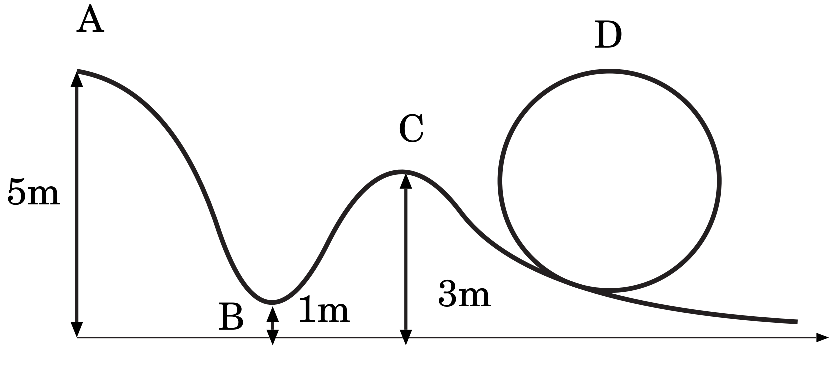
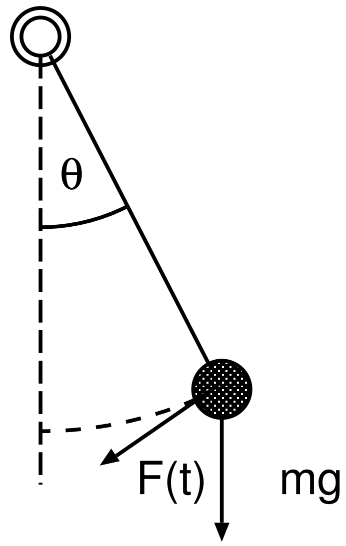


図 8: 問 4.2-7

5-3. 念じれば揺れる振り子 (振り子の強制振動)



- 先に示した通り，普通の振り子はエネルギーを保存しているために，振幅が増大することは決しておこらない．むしろ，空気抵抗や軸受の摩擦の影響で，エネルギーを失ってしまい，振幅はどんどん小さくなることが現実的には観測される[v].

- 振幅が大きくなるには，外から力を加える必要があることがわかる．実際には非常に弱いながらも，**ある周期的な外力**$F(t)$ をかけている．つまり，手を揺らしているわけである．

- θ 方向の運動方程式に外力 $F(t)$ を加えると，

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + F(t) \tag{32}$$

今，外力は $F(t) = F\sin(\omega t + \phi)$ のように角振動数 ω の周期的な力だとする．**微小振動 ($\theta \ll 1$) の場合**について考えることにし，解くべき運動方程式は,

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta + f\sin(\omega t + \phi) \tag{33}$$

となる．ここで,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad f = \frac{F}{ml} \tag{34}$$

とおいた.

- 式 (33) は非斉次線形微分方程式なので，ある一つの特解を $\theta_1(t)$ として，一般解は,

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \theta_1(t) \tag{35}$$

と書ける．ただし，$\theta_0(t)$ は斉次方程式の解，すなわち外力が無い方程式の解である．特解として，解の形を

$$\theta_1(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{36}$$

[v] このことを運動方程式から導いてみよう．例えば，質量の異なる 2 人が同じブランコに乗ったとしよう．同じ高さから運動を始めて，それ以降はブランコを漕ぐこと無くただのっているだけだとしよう．体型はほぼ同じで抵抗は同じようにかかると考えたときに，どちらが先に止まるだろうか？

とおいてみると，式 (33) は，

$$\begin{aligned}-A\omega^2\sin(\omega t+\phi) &= -A\omega_0^2\sin(\omega t+\phi)+f\sin(\omega t+\phi)\\ &\Longrightarrow \left[(\omega^2-\omega_0^2)A+f\right]\sin(\omega t+\phi)=0 \end{aligned} \tag{37}$$

となり，任意の時間 t でこの式が成り立つためには，

$$A=\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{38}$$

となることがわかる．斉次方程式の解 $\theta_0(t)$ は講義で調べた．振幅を B，位相を ψ として，

$$\theta_0(t)=B\cos(\omega_0 t+\psi) \tag{39}$$

で与えられるので，結局一般解は，

$$\theta(t)=B\cos(\omega_0 t+\psi)+\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t+\phi) \tag{40}$$

となる．

- 初期条件として，真下の位置で止まっている状況を考える．つまり，$\theta(t=0)=0$，$\dot{\theta}(t=0)=0$ とすると，

$$\begin{aligned} 0 &= B\cos\psi+\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\phi\\ 0 &= -\omega_0 B\sin\psi+\frac{f\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\phi \end{aligned} \tag{41}$$

となり，これらより，

$$\begin{aligned}\theta(t) &= B\cos(\omega_0 t)\cos\psi-Bsin(\omega_0 t)\sin\psi+\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t+\phi)\\ &= \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\left(-\cos(\omega_0 t)\sin\phi-sin(\omega_0 t)\cos\phi\frac{\omega}{\omega_0}+\sin(\omega t)\cos\phi+cos(\omega t)\sin\phi\right)\\ &= \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\cos\phi\left(\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_0}sin(\omega_0 t)\right)+\sin\phi\left(cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)\right)\right)\end{aligned}$$

が得られる．

- 特に外力の角振動数 ω と振り子の角振動数 ω_0 が一致するときは，**共鳴**と呼ばれる．

その時の解を見ると，0/0 になる部分はロピタルの定理[w]より

$$\frac{1}{\omega_0-\omega}\left(\sin(\omega t)-\frac{\omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) \rightarrow \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)-t\cos(\omega_0 t) \tag{42}$$

$$\frac{1}{\omega_0-\omega}\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)\right) \rightarrow t\sin(\omega_0 t) \tag{43}$$

となり，解は

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \frac{f}{2\omega_0}\left(\cos\phi\left(\frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)-t\cos(\omega_0 t)\right)+\sin\phi\,(t\sin(\omega_0 t))\right)\\ &= \frac{f}{2\omega_0}\left(\frac{1}{\omega_0}\cos\phi\sin(\omega_0 t)-t\cos(\omega_0 t+\phi)\right)\end{aligned} \tag{44}$$

ここから，共鳴状態では振幅は時間と共に増大することがわかる．実際に適当なパラメータでの様子を図に示した．図には共鳴状態からずれた場合 $(\omega=0.8\omega_0)$ の場合も同時に示した．

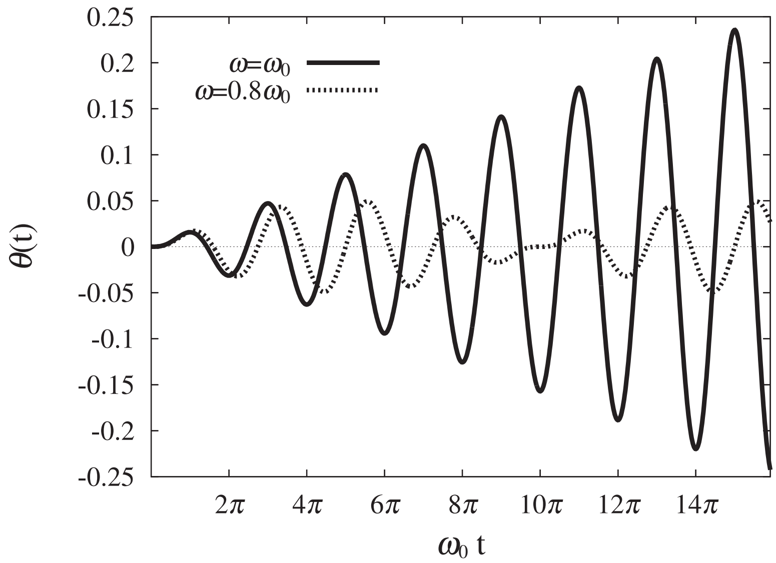


図 9: 振れ角度 θ の時間依存性．外力の位相 ϕ は 0 とし，$f=0.01$ とした．

1. 振り子をどんどん揺らすためには，振り子の固有角振動数 ω_0 と同じ角振動数で周期的に揺するのがよい．

---

[w] $h(x)=f(x)/g(x)$ において，$f(x_0)=0$，$g(x_0)=0$ のときに，$\lim_{x\to x_0} h(x)$ を知りたいとする．今，$f'(x_0)\neq 0$，$g'(x_0)\neq 0$ ならば，テイラー展開より，

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots}{g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+\cdots}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x_0)+\cdots}{g'(x_0)+\cdots}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

となることがわかる．

2. その力がいくら弱くても，大きな振幅に換えることができる．これは効率のよいエネルギー注入法になりうる．振幅は時間 t に比例して大きくなる．

3. ここでの解析は微小振動の条件の元でのみ正しいが，本質的には揺れを増大させる条件は本質的にこれでよい．

4. 共鳴状態での力学的エネルギー E は，式 (44) から求めることができる．

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1-cos\theta) \simeq \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 \\ &= \frac{ml^2f^2}{8\omega_0}\left(\omega_0^2t^2 - \omega_0 t\sin 2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t\right) \end{aligned} \tag{45}$$

   どんどんエネルギーが貯っていくことがわかる．ここでは簡単のため $\phi = 0$ とした．

5. 角振動数が固有角振動数からずれると揺れない．つまり，紐の長さが異なる振り子は同時には振れないので，特定の振り子だけが選択的に揺さぶれる．

6. この共鳴現象は，自然界でも，あるいは応用上でも様々な例がある．

   - 電子レンジ
   - 電気回路
   - スピーカー
   - $\cdots$

問 2.4-1 身の回りで運動量が保存していることがわかる現象をあげよ．

問 2.5-1 **(過去問より)** 自然長からののびに比例する復元力が働くバネがある．このバネを特撮物のロボットにつけたときに不自然に見えない条件を考える．時間と空間の縮尺を変えたときに運動方程式が不変になるための条件を述べよ．その条件の意味を解説せよ．