計算ノート (力学 (金))
福島孝治 (東京大学院総合文化)
2005. 7. 1: ver. 1.0

第 11 回講義の宿題の答え

1. 2 つの原子間に働く力のモデルとして，レナード・ジョーンズ (Lennard-Jones) 力がある．質量 m の原子がもう一つの原子から受けるポテンシャルは，原子間の距離を r として，

$$U(r) = 4\epsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$

と与えられる．ここで，σ, ϵ は定数とする．原子間の距離 r だけに注目し，一次元空間の力学的運動を考える．

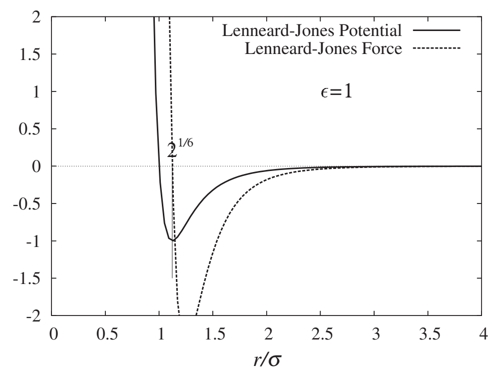


図 10: Lenneard–Jones ポテンシャル ($\epsilon = 1$) とその力..

このポテンシャルは中性原子間のポテンシャルのモデルとしてよく用いられる．遠方の Von der Waals 引力に関する r^{-6} と，近傍でのハードコア的な斥力を r^{-12} として近似したモデルになっている．
ポテンシャルが与えられているので，力を求める．力は，

$$F_r = -\frac{d}{dr}U(r) = 24\epsilon\sigma\left(2\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right)$$

となる．ちょうど力がつり合う ($F_r = 0$) ところは，$r^* = 2^{1/6}\sigma$ であり，そのときのポテンシャルの値は $U(r^*) = -\epsilon$ である．

2. 張力 T の最後の式を確認せよ．それから，グラフを描いてみよう．いつ一番張力が大きくなるだろうか?

まず，軌道に対して水平方向の運動方程式 $-ml\dot{\theta} = mg\cos\theta - T$ から，張力 T を求める．

$$T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$$

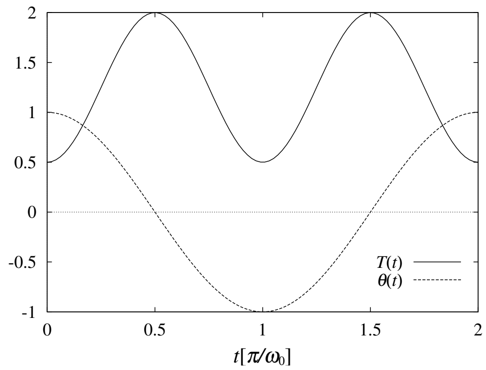
$\downarrow$ 振動の一般解 $\theta = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ を使う．ここで A は振幅，$\omega_0 = \frac{g}{l}$ は振り子の振動数.

$\downarrow$ それから，微小近似. $\cos\theta \sim 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$

$$
\downarrow \quad \text{ここで近似をどこまでとるかは問題であるが，第二項を考慮するならば，それは}O(\theta^2)\text{なので，第一項も同じオーダーまで考える必要がある．}
$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq mg(1-\frac{\theta^2}{2}) + ml\dot{\theta}^2 \\
&= mg\left(1-\frac{A^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\phi)\right) + mlA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\phi) \\
&= mg\left(1+A^2-\frac{3}{2}A^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)\right) \qquad (46)
\end{aligned}
$$

張力の時間依存性をグラフに書いておく．$mg = 1$として，振幅$A = 1.0$，初期位相$\phi = 0$とした．
式(46)から，張力の大きさの周期は振り子の周期の1/2倍になっていて，ちょうど，$\theta = 0$のとき，つまり，振り子の速さが最も大きいとき，かつ重力の効果が一番大きいときに張力が最大になっている．振り子に乗ってみると，遠心力と重力が$\theta = 0$で最大になっている．



練習問題 4 の解答例

福島孝治 (東大院総合文化)

ver. 1.0: 2005.7.1

問 4.1-1：「仕事の次元」 仕事の次元を求めよ．

仕事は，力を軌道にそって線積分したものである．

$$
[\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}] = M\frac{L}{T^2}\cdot L = M\frac{L^2}{T^2}
$$

問 4.1-2：「斜面の落下」 水平面と角度θをなす斜面上の地面からの高さhの位置に質量mの物体が置かれている．

1. 斜面はなめらかとして，地面に到達するまでに重力が質点にする仕事を求めよ．
2. 地面からの高さhは一定として，斜面の角度を変化させたときに，この仕事はどうなるかを答えよ．

1. 斜面上の物体に置かれた物体に働く力は，重力と斜面からの抗力である．ところが，物体は斜面に沿って運動するので，抗力と重力の斜面に対して垂直成分は仕事をしない

(運動の方向と力の方向が垂直になっている．$\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$)．力の斜面に沿った方向の力は，$F_l = mg\sin\theta$ であり，一定である．一方で，斜面の長さは $l = \frac{h}{\sin\theta}$ である．

$$
\text{仕事} = \int_{\text{上}}^{\text{下}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = mg\sin\theta \frac{h}{\sin\theta} = mgh
$$

となる．
2. この結果は角度 θ には全く依存しない．つまり，高さ h から地面まで重力がする仕事はどんな斜面でも関係ないことがわかる．

問 4.1-3：「振り子の仕事」 振り子の運動について考える．振り子に働く力は，重力，振り子を支える糸の張力，および空気の抵抗である．以下の問に理由とともに答えよ．

1. これらのうちに，振り子に仕事をするのはどれか?
2. そのうちに常に負の仕事をするのはどれか?

1. 糸はたるまないとすると，振り子の運動に常に垂直の方向に力が働くのは，糸の張力である．つまり，それ以外の力はなんらかの意味で仕事をする．答えは，重力と空気抵抗.
2. 答えは空気抵抗．理由は，空気抵抗は常に振り子の速度に抵抗力として働き，振り子の運動エネルギーを減らすからである．重力は正にも負にもなる[x].

問 4.2-1 次の保存力について，ポテンシャルエネルギーを求めよ．積分定数は適当に設定せよ．

1. ばねの弾性力
2. 一様な重力

1. 力からポテンシャルを求めてみよう．ここは簡単のために一次元運動の問題を考えることにする．今，ばねは一次元方向にしか動かないとする．力は $\boldsymbol{F} = (-kx, 0, 0)$ なので，原点を基準として，ポテンシャル U は

$$
U = -\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\text{経路}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) - \int_0^x (-kx')dx' = \frac{kx^2}{2}
$$

となる．
2．一様な重力の場合は，鉛直上向きに z 軸をとれば，地面 $(z=0)$ を基準 $(U(z=0) = 0)$ にして，

$$
U = mgz
$$

問 4.2-2 原点にある質量 M の質点と位置 (x, y, z) にある質量 m の質点の間に働く万有引力のポテンシャル $U(x, y, z)$ は，万有引力定数を G として，

$$
U(x, y, z) = G\frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
$$

で与えられる．２つの質点間働く力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ を求めよ．

[x] もう少し説明した方がいいかな?

ポテンシャルが与えられたときに力は $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ で求めることが出来る．

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) U \tag{47}$$

特にその x 成分 F_x は,

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{GMm(-1/2)(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{-GMmx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{48}$$

なので， $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおいて，力ベクトル $\boldsymbol{F}$ は,

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{-GMmx}{r^3}, \frac{-GMmy}{r^3}, \frac{-GMmz}{r^3}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{49}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{r}$ は大きさ 1 の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x/r, y/r, z/r)$ である．力 $\boldsymbol{F}$ の大きさが r^{-2} になることがわかるだろうか.

問 4.2-3 エネルギー保存則の別の証明を考える．質量 m の質点の速度を $\boldsymbol{v}$ として，位置$\boldsymbol{x}$でのポテンシャルエネルギーを $U(\boldsymbol{x})$ とする．この質点の力学的エネルギー E は,

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + U(\boldsymbol{x})$$

とする．このとき，力学的エネルギー保存則，すなわち，$\frac{d}{dt}E = 0$ を示せ.

講義では，ある質点の軌跡に沿って，ある点と軌跡上のある点の力学的エネルギーが等しいことを導いた．ここでは，エネルギー保存則をエネルギーの時間変化が無いとして確認する．これも宿題で出した問題であった．さて，順番にやってみる．

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + u(\boldsymbol{x})\right) \\
&\quad (U \text{ は時間依存しないが，} \boldsymbol{x} \text{を介して時間に依存している.}) \\
&= m\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\frac{d}{d\boldsymbol{x}}U, \\
&= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} + \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot(-\boldsymbol{F}) = 0
\end{aligned}$$

最後の変形で使ったのは,

1. 運動方程式: $m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$
2. ポテンシャルの定義: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{x})$

であった[y].

[y] 一次元の問題として扱っている解答例がたびたび見受けられた．もちろん，3 次元運動でもエネルギー保存則は同じ条件のもとに成立する．ベクトルの考え方に慣れる練習として，復習しておこう．スカラーの式にとベクトル変数が単独で存在することはありえないので，式の意味を考えながら...