

問 4.1-5 : 「摩擦力のする仕事」 車輪のついた椅子を押して、これに初速  $v_0 = 2\text{m/s}$  を与える．この椅子は地面との間の摩擦力を受けて減速し、やがて静止した．

一般に運動している物体に働く摩擦力は、運動方向と反対向きに大きさは垂直抗力に比例する．比例係数を動摩擦係数と呼ぶ．垂直抗力とは地面が物体を押している地面と垂直方向の力のことでである．地面と椅子の動摩擦係数は  $0.8$  とする．

1. 仕事と運動エネルギーの関係を使って、椅子が静止するまでに運動する距離を求めよ．
2. 初速を二倍にすると、静止する距離は何倍になるか?

1. 摩擦力は垂直抗力に比例する．今、垂直抗力は  $mg$  であり、摩擦係数を  $\mu$  とすると、摩擦力は  $mg\mu$  で、方向は速度と反対方向である．このとき、距離  $l$  だけ移動する間に摩擦力のする仕事は、 $-mg\mu l$  である．この仕事は椅子の運動エネルギーの増減に等しい．この関係から距離  $l$  を求めることが出来、

$$-mg\mu l = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow l = \frac{1}{2g\mu}v_0^2 \simeq \frac{1}{2 \times 9.8 \times 0.8}2^2 \simeq 0.26$$

となる、つまり、26cm で止まる．

初速度が制御できるとすれば、初速度と停止までの移動距離から摩擦係数が見積もることができる．

2. 移動距離  $l$  は初速度  $v_0$  の二乗に比例するので、初速度を二倍にすれば、移動距離は四倍になる．

問 4.2-4 速度に比例する抵抗がある場合の落下運動を考える．簡単のために、鉛直方向の運動しか考えないとする．初速度  $v_0 = 0$  とする．

1. 時刻  $t$  での質点の運動エネルギー  $K(t)$  を求めよ．
2. 時刻  $t$  での重力による位置エネルギーを  $U(t)$  を求めよ．
3. 時刻  $t$  までに、抵抗がした仕事  $W(t)$  を求めよ．
4. これらの間に成り立つ関係式を考えよ．

講義でやった話の延長である．運動方程式の解からエネルギーを求めてみる．質点の質量を  $m$ 、重力加速度を  $g$ 、抵抗係数を  $\kappa$  とすると、運動方程式は  $m\ddot{x} = -mg - \kappa\dot{x}$  となる．この運動方程式の一般解は、未定定数を  $C_1, C_2$  として、

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{m}{\kappa}gt$$

である．また、速度は  $\dot{x} = -\frac{\kappa}{m}C_2 e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{mg}{\kappa}$  である．初期条件は、 $t = 0$  で、 $x = 0, v_0 = 0$  とすると、

$$\begin{aligned} x(t=0) = 0 &= C_1 + C_2 \\ \dot{x}(t=0) = 0 &= -\frac{\kappa}{m}C_2 - \frac{mg}{\kappa} \Rightarrow C_1 = \frac{m^2}{\kappa^2}g, C_2 = -\frac{m^2}{\kappa^2}g \end{aligned}$$

これらより,

$$x(t) = \frac{m^2}{\kappa^2} g \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) - \frac{mg}{\kappa} t \quad (50)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{mg}{\kappa} \left(e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1\right) \quad (51)$$

となる.

1. 運動エネルギーは,

$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{m^3 g^2}{2\kappa^2} \left[e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1\right]^2$$

となる.

極限の様子を調べておくと,  $t=0$  では  $K(t=0) = 0$  で, 初期条件からこれは当然の結果である.  $t \rightarrow \infty$  のとき,  $K(\infty) = \frac{m^3 g^2}{2\kappa^2}$  であるが, これは終端速度が  $v_\infty = \frac{mg}{\kappa}$  であることから予想される結果である.

2. 位置エネルギーは,

$$U(t) = mgx(t) = \frac{m^3 g^2}{\kappa^2} \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) - \frac{m^2 g^2}{\kappa} t$$

である.

3. 抵抗力がする仕事は,

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_0^{x(t)} (-\kappa \dot{x}) dx = \int_0^t (-\kappa \dot{x}) \frac{dx}{dt'} dt' = -\kappa \int_0^t \dot{x}^2 dt' \\ &= -\kappa \int_0^t \frac{m^2 g^2}{\kappa^2} \left(e^{-\frac{\kappa}{m}t'} - 1\right)^2 dt' \\ &= \frac{m^3 g^2}{2\kappa^2} \left(e^{-\frac{\kappa}{m}t} - 1\right)^2 - \frac{m^2 g^2}{\kappa} t + \frac{m^3 g^2}{\kappa^2} \left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) \end{aligned} \quad (52)$$

である.

3. この仕事は,

$$W(t) = K(t) + U(t)$$

の関係がある.

問 4.2-5 : 「5 個球振り子」 講義で見せた 5 つ玉の振り子で, 3 つの球を持ち上げたときに, 衝突後にはやはり 3 つの球が飛び出した. どうして止まっていた 2 つだけが飛び出さないのだろうか? 衝突に際して力学的エネルギーは保存しているとし, さらに運動量保存則を考慮して, この現象を考察せよ.

また, それぞれ 3 つ分, 2 つ分の質量をもった 2 つの振り子を同じように衝突させたときにはどのような運動になるかを考察せよ.

講義でも話した通り, この問題はいろいろと難しいので, 夏休みの宿題にする.

問 4.2-6 : 「球面からの飛び出し」

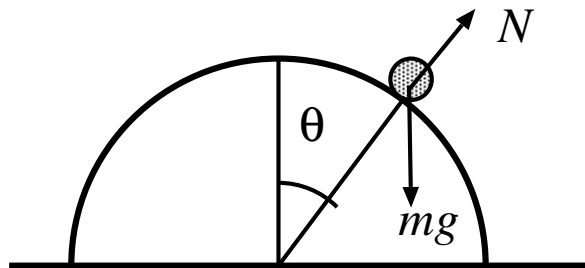
図7のように半径  $R$  の半円の頂点の位置から質量  $m$  の質点を初速度 0 で滑り出したとき、半円のどの位置で円から離れるかを考えてみる。半円から離れる条件は、垂直抗力が 0 になることである。

1. この質点の運動方程式を書け (ヒント: 振り子の運動方程式を参考にせよ)。
2. この質点の力学的エネルギー保存則の関係を書き下せ。
3. 上の二つの式より、半円から離れる場所を求めよ。

球に働く力は、図のように重力  $mg$  と円からの垂直抗力  $N$  である。座標は振り子の場合と同様に設定する。座標の正の方向は、それぞれの変数が大きくなる方向をとることにする。原点は円の中心にとり、質点の初期値は  $(r, \theta) = (R, 0)$  である。

1. 運動方程式は、それぞれ

$$\begin{aligned} \theta \text{ 方向: } & mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta \\ r \text{ 方向: } & -mR\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + N \end{aligned}$$



である。

2.  $\theta$  方向の運動方程式の両辺に速度  $R\dot{\theta}$  をかけて、時間で積分してみる<sup>26</sup>。

$$\begin{aligned} \int dt R\dot{\theta} (mR\ddot{\theta}) &= \int dt R\dot{\theta} (mg \sin \theta) \\ \int dt \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 \right) &= - \int dt \frac{d}{dt} (mgR \cos \theta) \end{aligned}$$

より、右辺を左辺に移行することにより、

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + mgR \cos \theta \right] = 0$$

であることがわかる。つまり、この式の括弧の中は時間に依存しない保存量であることがわかる。この保存量が力学的エネルギーである。

3. 初期条件は、 $t = 0$  で  $\theta = 0, \dot{\theta} = 0$  であるので、このときの力学的エネルギーは  $E = +mgR$  である。これと力学的エネルギー保存式より、任意の時間で、

$$\frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + mgR \cos \theta = +mgR$$

が成り立ち、 $mR\dot{\theta}^2 = -2mg \cos \theta + 2mg$  であり、垂直抗力  $N(t)$  は、

$$N(t) = -mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta = 2mg \cos \theta - 2mg + mg \cos \theta$$

<sup>26</sup> この意味は円周に沿って運動する質点の仕事を計算している。

であることがわかる．質点が円周から離れる条件は  $N = 0$  であり，そこから角度  $\theta$  の条件が

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

であることがわかる．つまり，この角度で垂直抗力がなくなり，円周から質点は飛び出す．

問 4.2-7 : 「ジェットコースター」

図 8 のような摩擦のないジェットコースターを考えよう．点 A から質量 500Kg のジェットコースターを初速 0 で出発させる．

1. 点 B および，点 C での速度を求めよ．
2. 点 A から点 C まで運動するときの，重力のする仕事を求めよ．
3. ループの頂点 D は点 A と同じ高さに位置している．ジェットコースターはこの点を無事に通過できるか？

1. 力学的エネルギー保存則からわかることを考えてみる．まず，点 A での速度はゼロなので，地面を位置エネルギーの基準にとれば，点 A に質点がいるときの力学的エネルギーは， $mgh_A \sin 400 \times 9.8 \times 5 = 24500[N]$  である．点 A の高さを  $h_A$  とすると，点 B での位置エネルギーは  $mgh_B = mgh_A/5$  であるので，点 B での速度を  $v_B$  とし，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B = mgh_A \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2}{m} [mgh_A - mgh_B]} = \sqrt{2g \frac{4h_A}{5}} \simeq \sqrt{8 \times 9.8} = 8.9m/s$$

であることがわかる．同様に，

$$v_c = \sqrt{\frac{4}{5}gh_A} = 2\sqrt{9.8} = 6.3m/s$$

である．

2. 重力のする仕事は質点の獲得する運動エネルギーの増減に等しい．

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_c^2 = \frac{1}{2}m \frac{4}{5}gh_A = \frac{2}{5}mgh_A$$

である．これは点 A と点 C の位置エネルギーの差に等しい．

3. 仮に点 D までジェットコースターが到着したとしても，力学的エネルギー保存則より，点 D の運動エネルギーはゼロである．つまり，点 D を通過できずに落下してしまうことになる．

実際にはそれ以前の点で円軌道から受ける垂直抗力が無くなり，軌道から飛び出すことが示せる．また，飛び出さないための条件から，初期位置 A は点 D よりどのくらい高くなければならないかもわかる<sup>27</sup>．

<sup>27</sup>宿題にしよう