

第三回物理学 B レポート問題の解答例

福島孝治 (東京大学大学院総合文化研究科)

ver. 1.0: 2005.08.17

問題 1: 練習問題 問 3.2-2 より 雪合戦? :

右図のように高さ h の壁から l だけ離れた左の位置に球を投げる人がいる．その人の能力で，球は初速度 v_0 でいつも投げることができる．ただし，方向は自由に調整できるとする．壁の右に隠れている人にとって，必ず球が到達しない領域はあるか?それはどこか?

問題の趣旨：放物運動なので，起こっていることはとても単純だが，条件が複雑でやっかいな問題である．ゆっくりと論理を組み立てることがここでの趣旨である．それから，ともすれば式変形に追われ気味になるかもしれないが「結局はどういうことなのか」を立ち止まって考えてみて欲しい，ボールを投げているだけの問題なので ...

まず，基本的なことからまとめる．この問題では，壁までの距離 l と壁の高さ h が与えられているとして，変数は初速度 v_0 と水平面とのなす投げ上げ角 θ である．初速度を v_0 としたときに，水平方向 (x 方向) と鉛直方向 (z 方向) の初速はそれぞれ ($v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta$) となる．それぞれの方向についての運動方程式の解析から，時刻 t における球の位置は，

$$\begin{aligned}z(t) &= v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2 \\x(t) &= v_0 t \cos \theta\end{aligned}$$

である．壁が無いとして， $t \neq 0$ で再び地面に到着する時刻 t^* は， $z(t^*) = 0$ より，

$$v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t = 0 \implies t^* = \frac{2v_0}{g} \sin \theta$$

と求まり，そのときの飛距離 $x(t^*)$ は，

$$x(t^*) = \frac{2v_0^2}{g} \cos \theta \sin \theta = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

となる．このことから，最高到達地点は，投げ上げ角が $\theta = \pi/4$ のときであることがわかる．さらに角度が大きくなると，単調に飛距離は減少する．

次に，球が壁を越える条件を考えてみる．水平方向には等速直線運動するので，壁の位置に球がくる時間 T は， $v_0 T \cos \theta = l$ が成り立つ．条件はその時刻における $z(t)$ が壁の高さよりも高いことである．すなわち，

$$v_0 T \sin \theta - \frac{1}{2} g T^2 = l \tan \theta - \frac{g l^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} > h$$

である．この不等式を満たす変数 (θ, v_0) の領域で球は壁を越えられる．領域の境界は不等号を等式と替えた方程式

$$\tan^2 \theta - \frac{2v_0^2}{g l} \tan \theta + 1 + \frac{2v_0^2 h}{g l^2} = 0$$

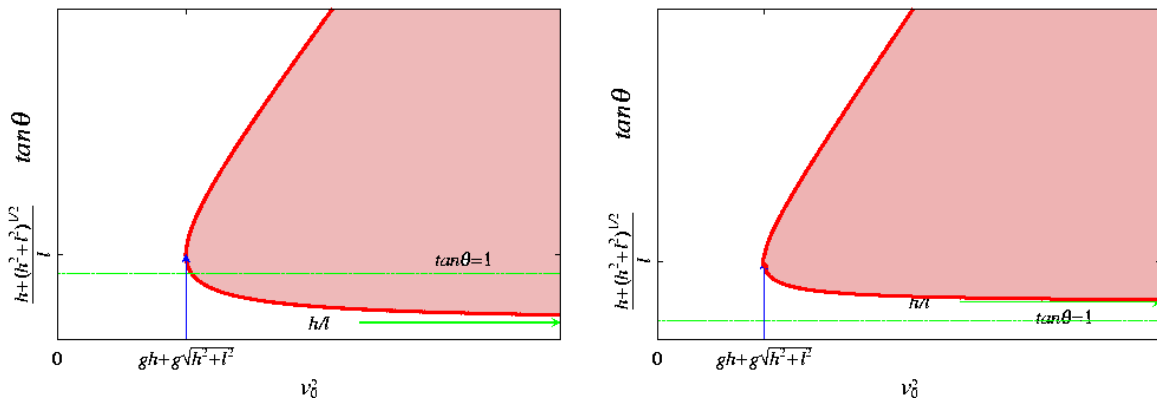


図 11: 球が壁を越える条件を満たす変数 $(\tan \theta, v_0^2)$ の領域．左は、 h/l が 1 よりも小さい場合．右はその逆に $h/l > 1$ の場合である．最大飛距離を出す投げ上げ角が、 $\theta = \pi/4$ 、つまり $\tan \theta = 1$ であることに注意すると、条件を満たす領域に $\tan \theta = 1$ を含むと、そのときに最大飛距離を与え、そうでない場合 (右図) は、条件を満たしながら投げ上げ角が最小の時に最大飛距離を与える．どちらの場合も最小飛距離は、最大投げ上げ角、つまり、上の境界線がそれを与えている．

で与えられる． $\tan \theta$ について、その方程式を解いてみると、

$$\tan \theta = \frac{v_0^2}{gl} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 h}{gl^2}\right)} \quad (53)$$

である．この解は 2 つの線 (分岐) からなっており、それらに囲まれている領域で条件が満たされる．変数 $\tan \theta$ と v_0^2 について、その境界と領域を図 11 に示した．

投げ上げ角 θ の条件 ($0 < \theta < \pi/2$) から、 $\tan \theta$ の取り得る値は正の実数である．実数であるための条件から、 v_0 についての制限が出てくる．それは、

$$\left(\frac{v_0^2}{gl}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 h}{gl^2}\right) > 0 \implies v_0^2 > g(h + \sqrt{h^2 + l^2})$$

であり、 v_0 についての最小値が決まる (図 11 にて矢印で記したところ)²⁸．ここで、改めて式 (53) を見ると、 v_0 の大きい極限で $\tan \theta$ は定数になっていることがわかる．その値は、 h/l である²⁹．図 11 では、 $h/l < 1$ (左) と $h/l > 1$ (右) を別けてみた．求めたい問題は、 v_0 を指定して、 θ を変えたときの最大飛距離 x_{\max} と最小飛距離 x_{\min} を知るということである．最小飛距離 x_{\min} を出すのは、どちらも投げ上げ角最大、つまり図の上の境界線上である．

$$x_{\min} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = l \frac{\tan \theta}{\tan \theta - h/l} = l \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2} - 2v_0^2 gh}{v_0^2 - gh + \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2} - 2v_0^2 gh} \quad (54)$$

2 番目の等式では、境界を決める式 (53) より、 $1 + \tan^2 \theta = \frac{2v_0^2}{gl} \tan \theta - \frac{2v_0^2 h}{gl^2}$ の関係を使った³⁰．これに対して、最大飛距離は、図を見るといくつかの場合に分けられることがわ

²⁸ ある程度がんばって投げないと、壁は越えられないという当り前の条件である．

²⁹ 超豪速球を投げられれば、壁の上端めがけて投げたときに、最小の投げ上げ角で壁を越えられる．

³⁰ この式の v_0 を大きい極限をとると、 $x_{\min} = l$ となる．豪速球を限りなく垂直に投げると、限りなく壁のすぐ向こうに到着するということ．

かる．特に，壁が無いときに最大飛距離を実現する投げ上げ角度が $\theta = \pi/4$ ($\tan \theta = 1$) であることに注意すると， $h/l < 1$ と $h/l > 1$ では状況が異なることがわかり， $\tan \theta = 1$ かあるいは，最小投げ上げ角ということになる³¹．

1. $h/l > 1$ (壁が高い場合) :

$$x_{\max} = l \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2 - 2v_0^2 g h}}{v_0^2 - g h - \sqrt{v_0^4 - g^2 l^2 - 2v_0^2 g h}} \quad (55)$$

2. $h/l < 1$ (壁が低い場合) : かつ

(a) $v_0^2 < \frac{gl}{1-h/l}$ の時 : $\tan \theta > 1$ なので，やはり上の式と同じ．

(b) $v_0^2 \geq \frac{gl}{1-h/l}$ の時 : 最大飛距離は $\tan \theta = 1$ で与えられる．

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{v_0^2}{g} \quad (56)$$

これ以外の領域が球のとんで来ない安全な領域である．その領域を v_0 の関数として書いてみるとよいだろう．

³¹左 $h/l < 1$ の場合でも，初速 v_0 の値によっては， $\tan \theta = 1$ が壁を越えられないこともある (境界領域の左端のあたり) ．

問題 2 : 練習問題 問 3.4-1 より :

直線上を運動する質量 m の質点に, 原点からの距離 x に比例する引力と, 速度に比例する抵抗力が働いているとき, 運動方程式は,

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -k \frac{d}{dt} x - \kappa x, \quad (k > 0, \kappa > 0)$$

となる.

1. 初期条件として, $t = 0$ のとき, $x = 0, dx/dt = v_0$ の解を求めよ.
2. 周期はどのようになっているか?
3. 振幅はどうなっているか?
4. 位置と速度を時間の関数として, 描け.

問題の趣旨: 2 階の線形微分方程式を解いてみようということです. これは, バネの振動の問題と, 速度に比例する抵抗の問題の合わせ技で, 特性方程式を用いて解くときに, 幾つかの状況が出て来る. また, 問題では陽に初期条件を与えなかったので, そこは自分で適当に設定し, 答えを図にすることができるかも課題である.

この運動方程式の両辺を m で割り移行することで,

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \mu \frac{d}{dt} x + \omega^2 x = 0 \quad (57)$$

が出て来る. ただし, $\mu = \kappa/m, \omega^2 = k/m$ である. この微分方程式の特性方程式は,

$$\lambda^2 + \mu\lambda + \omega^2 = 0 \quad (58)$$

である. 一般解はその根の性質で分類される.

(i) $\mu^2 - 4\omega^2 > 0$: 抵抗力が大きい場合

このとき特性方程式の根は, α, β をそれぞれ

$$\alpha = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \beta = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2} \quad (59)$$

としたときに, 相異なる 2 つの負根 $-\alpha, -\beta$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) をもつ. 一般解は,

$$x(t) = C_1 \exp(-\alpha t) + C_2 \exp(-\beta t) \quad (60)$$

であり, 根がどちらも負であることから, 長時間極限では平衡点に収束する ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$)³². $x(t)$ が単調減少かどうかは初期条件に依存する. バネがのびる方向に初速度をもって引っ張れば一度伸びてから縮む. ただし, その場合でも $x(t) = 0$ を横切ることはない.

³²たゞたび見掛けた解答に「非周期的運動」とか「振動しない」とかがあった. これは説明になっていないのではないかな. 振動しない, 非周期的運動ってとても沢山あって, 運動を特定していない. α, β が共に負であることを明示することは大切で, そうでないと, 発散する可能性もある. 一度はグラフで示してみるといろいろとわかる.

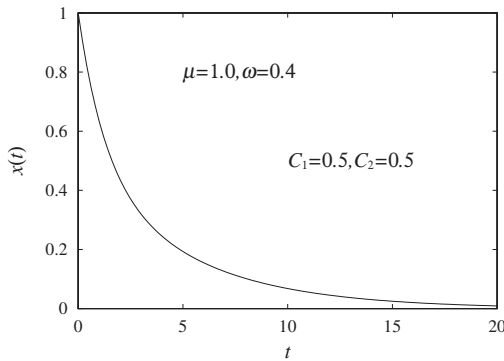


図 12: (i) の場合: 振動系の問題なのに振動しないのはなぜかという質問があったが, ここではとても摩擦が大きい状況に相当している.

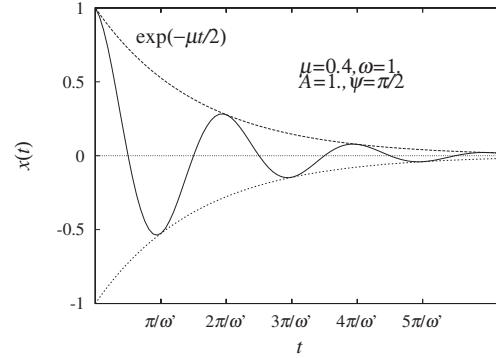


図 13: (ii) の場合: 振動の周期がよくわかるように横軸のスケールを書きおく必要がある. たまに周期がどんどん早くなっているようなグラフがあった. 振幅が減衰するので, 周期が早くなるような感じがするかもしれないが, それは誤解である. 周期はいつでも一定.

(ii) $\mu^2 - 4\omega^2 < 0$: バネ定数が大きい場合

特性方程式の根は虚数 $-\mu/2 \pm i\omega'$ になるから, 一般解は,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\mu/2t} (C_1 \exp(i\omega't) + C_2 \exp(-i\omega't)) \\ &= e^{-\mu/2t} ((C_1 + C_2) \cos(\omega't) + i(C_1 - C_2) \sin(\omega't)) \\ &= Ae^{-\mu t/2} \sin(\omega't + \psi) \end{aligned} \quad (61)$$

である. ここで, $\omega' = \sqrt{4\omega^2 - \mu^2}/2$ であり, A, ψ は C_1, C_2 から決まる定数である. 単振動と比べると, 振幅は指数関数的 $\exp(-\mu t/2)$ に減少し, 角振動数が ω から ω' に減っている. このような運動は減衰振動と呼ばれている. 時間とともに減衰するのは振幅であって, 角振動数あるいは周期ではないことに注意しよう.

(iii) $\mu^2 - 4\omega^2 = 0$: ちょうどつり合う場合

これは特性方程式が重根を持つときである. 一つの基本解は, $x_1(t) = \exp(-\mu t/2)$ であるが, このままでは一次独立な 2 つの関数が得られていない. そこで, $x(t) = A(t) \exp(\lambda t)$ とおいて, 改めて微分方程式に代入して, $A(t)$ の満たすべき条件を考えてみる. 元々の特性方程式も考慮すると, 条件は $\ddot{A} + (2\lambda + \mu)\dot{A} = 0$ となるが, $A(t) = t$ はその条件を満たす. 結果として, もう一つの基本解は $x_2(t) = t \exp(-\mu t/2)$ となるのがわかる. 一般解は,

$$x(t) = e^{-\mu t/2} (C_1 + C_2 t) \quad (62)$$

となる. この運動は臨界減衰と呼ばれている³³.

³³ 臨界とはギリギリという意味である. どうして臨界減衰なのかはグラフを書きみればわかる (書かなくてもわかるが ...).

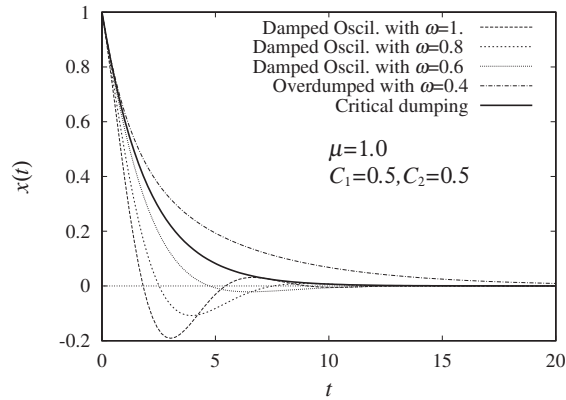


図 14: (iii) の場合: ちょうど, (i) と (ii) の境目なので「臨界」と呼ばれているのだろう。グラフには $\mu = 1$ として, ω を変えて書いてみた。 ω を減らして振動運動しなくなるところがこの臨界減衰である。

グラフを描くように指摘したが, そのことについて幾つかの注意点がある。また, グラフを描くためには初期条件をきちんと設定しないといけない。そこがいい加減なレポートがかなりあった。例えば,

- 縦軸横軸のスケール(目盛り)がない。そうしないと, どんなスケールの現象なのかまったくわからない。
- 初速度を 0 と設定しているのに, $t = 0$ のところで傾きが 0 でない。
- 減衰振動のときに, どういうわけか周期が段々小さくなっている。

今後は, 注意して欲しい。